Арнольд Бернхардт

Алгебра

для 7–8-го классов
вальдорфской школы

Руководство для учителей,
родителей и учеников,
снабженное большим
количеством примеров

Издательство Центра
вальдорфской педагогики

1999

Бернхардт А. **Алгебра.** / Пер. с нем. — М.: Издательство Московского Центра вальдорфской педагогики, 1999. — 184 с.

Вниманию читателей предлагается оригинальная методическая работа опытного швейцарского педагога Арнольда Бернхардта, посвященная преподаванию геометрии в 7—8-м классах общеобразовательной школы. Хотя автор адресует свою книгу прежде всего педагогам вальдорфских школ, однако, она, несомненно, будет интересна и более широкому кругу читателей. Работа подкупает удивительно ясным и последовательным изложением, четкой, простроенной аргументацией, большим количеством точно подобранных заданий для учащихся. Последнее обстоятельство позволяет использовать ее непосредственно при подготовке к урокам. Кроме того, автор подробно рассматривает оригинальные подходы к объяснению таких традиционно непростых для понимания тем, как алгебраические выражения, отрицательные числа и линейные уравнения. Ему удается включить эти, казалось бы, чисто математические главы в более широкий контекст и тем самым сделать их значительно доступнее для восприятия и усвоения школьниками.

ISBN 5-85251-057-2

Содержание

Предисловие – цели и задачи настоящей книги

Дорогой читатель!

Настоящая книга написана в первую очередь для учителей 7-го и 8-го классов, но не только для них одних. Она адресована и учителям математики старших классов. Ее могут прочесть ученики и родители. Автор двадцать пять лет преподавал математику в старших классах вальдорфской школы Базеля и однажды работал в качестве классного учителя 8-го класса. Он знаком с проблематикой перехода к старшей школе и с тем фактом, что классный учитель в вышеназванных классах сталкивается с очень серьезными задачами — разумеется, не только в математике, — но здесь, может быть, эти задачи особенно трудны.

Поэтому с некоторого времени я вменил себе в обязанность регулярно консультировать классных учителей. С весны 1986 года я систематически прорабатываю с классными учителями материал 7-го и 8-го классов; мы встречаемся раз в неделю (наши встречи внесены в расписание), так что подобные консультации стали регулярными. Подобные занятия были бы, безусловно, полезны во всех школах, поскольку большинство классных учителей чувствуют свою несостоятельность перед лицом обширного материала.

Кроме того, существуют молодые школы, в которых учителя старших классов сами имеют еще очень незначительный опыт. Поэтому я и решился написать эту книгу. Я передаю ее для совместной работы классным учителям и учителям математики.

Я всюду старался сделать материал по возможности максимально доступным, не скупился на примеры. Однако в книге встречаются главы, которые классному учителю лучше проработать в диалоге с предметником. Подробного разгово-

ра требуют и типы задач, не разобранные в настоящей работе. Вообще, автор рассчитывал на постепенное, неторопливое погружение в книгу. В ней не просто прорабатывается материал, безусловно принадлежащий к учебному плану 7-го и 8-го классов — этот материал, кроме того, дан и в более широкой перспективе. Ничто так не противоречит духу вальдорфской педагогики, как установление жестких программных рамок, предписывающих, какие задачи должны быть когда рассмотрены и что за чем должно последовать. Разумеется, в вальдорфской школе стремятся к овладению основополагающим материалом; однако сверх этого для каждого ученика (и для каждого учителя) должна существовать возможность продвинуться настолько, насколько это соответствует его способностям. Классный учитель, осваивая настоящую книгу, может пройти определенный путь обучения математике. Это позволит ему так представлять классу новый материал, чтобы это вдохновляло учеников. Когда ученики замечают, что классный учитель знает не только то, что в данный момент рассказывает, но и нечто большее, его авторитет в классе здоровым образом укрепляется. Для этого необходима совместная работа классного учителя и предметника. Если она происходит, тогда и предметник, в свою очередь, осведомлен в том, насколько продвинулся класс и как он будет работать, когда перейдет к нему. Классный учитель и учитель-специалист найдут в этой книге ту красную нить, которая соединяет среднюю и старшую школы. Средняя школа не может опираться только на младшую школу, она должна ориентироваться на старшие классы. Только таким образом вальдорфская педагогика может состояться.

Рудольф Штейнер мечтал о том, чтобы учебный материал никогда не изучался раз и навсегда. Рассмотрение должно изменяться от класса к классу — как растут и изменяются сами ученики.

Поэтому в книге можно встретить рассмотрения, напоминающие по своему стилю работу в старшей школе — но только

напоминающие. Определения не доводятся до последней степени строгости, порой подача материала только подготавливает переживание учеников. Учебный план Рудольфа Штейнера — это произведение искусства, возникшее из глубокого прозрения в существо ребенка и подростка. И если Штейнер рекомендует тот или иной материал в том или ином возрасте, то постольку, поскольку данный материал в состоянии разбудить в ребенке силы, которые сами стремятся к раскрытию в этом возрасте — в нашем примере это тот вид мышления, который структурирует и обобщает общие арифметические правила, то есть мышление алгебраическое. Упустив подходящий момент, мы не просто оставим ребенка без необходимых знаний — он может оказаться вообще не в состоянии наверстать упущенное в будущем. Упущенное в определенном возрасте невозможно просто автоматически наверстать — ведь меняется вся душевная конфигурация.

Вскоре должна появиться аналогичная работа по геометрии для 7—8-го классов. Предыдущие замечания справедливы, разумеется, и для нее.

В настоящей работе прослеживается постепенный переход от числовых вычислений к буквенным. Даже когда ученики работают с буквенными выражениями, они должны внутренне чувствовать, что считают. Это чувство может возникнуть, если алгебраические выражения постоянно возникают в контексте общения, работы с однородными арифметическими (числовыми) выражениями. Пример: в связи с вычислением процентов вводится общая формула для вычисления процентов.

Главы, преимущественно посвященные выработке и закреплению рутинных навыков, перемежаются с главами, углубляющими понимание предмета. Так, перемежая упражнение и понимание, мы погружаемся в область положительных и отрицательных чисел, стремясь как к уверенности, так и к качественному, углубленному пониманию.

Также и уравнения рассматриваются таким образом, что-

бы в учениках укоренилось чувство: когда мы решаем уравнения, мы считаем. Именно исходя из переживания счета мы ведем их к технике преобразования уравнений. Внутренний счет позволяет им постоянно переживать равновесие правой и левой частей. И постепенно в душах учеников сам собой возникает образ весов.

В главах 8 и 9 подробно разобраны многие простые уравнения. Каждое новое уравнение означает небольшой шаг вперед по отношению к предыдущему. Уравнения являют для 7- и 8-классников нечто новое. Если они поймут основные методы решения на простых примерах, то сложные уравнения старших классов не составят для них никаких проблем.

Для многих учеников трудность представляют прикладные задачи; для них непросто перевести вычислительные проблемы на язык уравнений. В последних главах я попытался продемонстрировать примеры задач, решение которых ведет к составлению искомых уравнений. Затем приводятся упражнения для самостоятельной работы.

Вышеуказанные проблемы я рассматриваю не как раз и навсегда решенные. Это только начало, требующее продолжения. Прежде всего изменения должны будут претерпеть сборники задач. Пожалуйста, сообщите мне о своем опыте работы с этой книгой: в каких улучшениях она, по-вашему, нуждается.

Работая с книгой, вы убедитесь, что ученики, приобретя некоторый опыт, с легкостью начнут справляться с заданиями, поначалу казавшимися вам трудными (скажем, сокращение алгебраических дробей или алгебраическое деление суммы на сумму). Более того, они почувствуют вкус к такого рода заданиям. Очень важно, чтобы ученики могли расти вместе с ростом сложности заданий, учились бы на этом материале преодолению препятствий.

Я передаю эту книгу в руки классных учителей в надежде, что она послужит им хорошим введением в математику, позволит углубить свои знания в этом предмете, облегчит

решение серьезных задач и даст повод для укрепления совместной работы учителей среднего и старшего звеньев.

В заключение я хотел бы поблагодарить всех тех, кто внес свой вклад в появление этой книги.

Осень 1991 года
Арнольд Бернхардт

1. От арифметики к алгебре — раскрытие скобок

Многолетний опыт показал плодотворность введения алгебраических выражений в связи с арифметикой — даже с устным счетом. Удачный повод — устное умножение двузначных чисел. Умножим 7 на 23. Само собой разумеющимся образом мы разложим 23 на 20 + 3 и умножим *слагаемые* по отдельности:

$$7 \cdot 23 = 7 \cdot (20 + 3) = 7 \cdot 20 + 7 \cdot 3 = 140 + 21 = 161$$

Если один из сомножителей является однозначным числом. Другой может быть двух- и более значным; числа получатся не слишком большими:

$$3 \cdot 235 = 3 \cdot (200 + 30 + 5) = 3 \cdot 200 + 3 \cdot 30 + 3 \cdot 5 = \\ = 600 + 90 + 15 = 705$$

Если оба сомножителя двузначные, тогда следует разложить на слагаемые *и тот и другой*:

$$15 \cdot 27 = (10 + 5) \cdot (20 + 7) = 10 \cdot 20 + 10 \cdot 7 + 5 \cdot 20 + 5 \cdot 7 = \\ = 200 + 70 + 100 + 35 = 405$$

Чем больше сомножители, тем большие преимущества дает разложение:

$$32 \cdot 43 = (30 + 2) \cdot (40 + 3) = 30 \cdot 40 + 30 \cdot 3 + 2 \cdot 40 + 2 \cdot 3 = \\ = 1200 + 90 + 80 + 6 = 1376$$

В классе можно решать следующие примеры:

$$34 \cdot 52 = (30 + 4) \cdot (50 + 2) = 30 \cdot 50 + 30 \cdot 2 + 4 \cdot 50 + 4 \cdot 2 = \\ = 1500 + 60 + 200 + 8 = 1768$$

После ряда упражнений промежуточные результаты можно записывать сразу после скобок:

$43 \cdot 35 = (40 + 3) \cdot (30 + 5) = 1200 + 200 + 90 + 15 = 1505$

Сравним с умножением в столбик:

```
43 · 35
   105
 140
  1505
```

Результат, записанный в первой строке, не что иное, как сумма 90 + 15, 140 (по сути 1400 из-за сдвига на один разряд влево) — сумма 1200 + 200.

Здесь возникает вопрос: левое число умножать на правое или правое на левое? На результат это не влияет, для развития навыков хорошо, чтобы ученики могли сделать и то и другое:

```
43 · 35
   215
 129
 1505
```

215 — это сумма 200 + 15 и 1290 = 1200 + 90.

Но для более глубокого, основанного на ощущении понимания лучшее умножать правое число с помощью левого, поскольку левое число явно активно, а правое — пассивно. Что такое трижды пять? 3 здесь определяет, что нужно сделать с 5: нужно трижды эту пятерку *сложить*:

$3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5$

3 играет здесь активную роль, 5 — пассивную. Различие выступает и в названиях оперантов: 3 называется *множителем*, 5 — *множимым*. Суффикс “-тель” встречается во многих словах, имеющих активный оттенок. Если мы не стремимся подчеркнуть это различие ролей, мы называем оба числа *сомножителями*.

Разумеется, нас никто не заставляет раскладывать оба сомножителя на десятки и единицы; просто данное разложение очень уж согласуется с нашей десятичной системой

счисления:

$15 \cdot 13 = (10 + 5) \cdot (10 + 3) = 100 + 30 + 50 + 15 = 195$

Но с тем же успехом можно считать и по-другому:

$15 \cdot 13 = (9 + 6) \cdot (8 + 5) = 72 + 45 + 48 + 30$

Поскольку 2 и 8 дополняют друг друга до десятка, проще всего складывать промежуточные результаты в следующей последовательности: $72 + 48 + 30 + 45 = 195$

или: $15 \cdot 13 = (7 + 8) \cdot (9 + 4) = 63 + 28 + 72 + 32 =$
$= 63 + 100 + 32 = 195$

Сколько возможных разложений существует в данном примере? (42, 7 для первого сомножителя и 6 для второго.) Каждый раз будут появляться 4 новых слагаемых; но каждый раз они будут вместе давать 195. Удивительно! Разумеется, такие упражнения можно давать и не дожидаясь 7-го класса. Они развивают подвижность в счете, при этом на практике используется то, что Рудольф Штейнер ставил во главу всякого обучения арифметике: разложение чисел на слагаемые;

например, $12 = 5 + 7$ $\quad 12 = 4 + 8$ $\quad 12 = 3 + 9$ и т.д.

Но теперь переход от числового к *алгебраическому* счету. Снова разложим числа на десятки и единицы, зафиксируем единицы и будем последовательно увеличивать десятки в обоих сомножителях:

$12 \cdot 13 = (10 + 2) \cdot (10 + 3) = 100 + 30 + 20 + 6 = 156$
$22 \cdot 23 = (20 + 2) \cdot (20 + 3) = 400 + 60 + 40 + 6 = 506$
$32 \cdot 33 = (30 + 2) \cdot (30 + 3) = 900 + 90 + 60 + 6 = 1056$
$42 \cdot 43 = (40 + 2) \cdot (40 + 3) = 1600 + 120 + 80 + 6 = 1806$
$52 \cdot 53 = (50 + 2) \cdot (50 + 3) = 2500 + 150 + 100 + 6 = 2756$

Остановимся на минутку и посмотрим, что получилось: первая колонка промежуточных произведений дает полные квадраты: 100, 400, 900... вторая колонка — ряд на тридцать: 30, 60, 90... третья колонка — ряд на двадцать: 20, 40, 60... в

четвертой всегда одно и то же число — 6. Пойдем дальше:

$62 \cdot 63 = (60 + 2) \cdot (60 + 3) = 3600 + 180 + 120 + 6 = 3906$
$72 \cdot 73 = (70 + 2) \cdot (70 + 3) = 4900 + 210 + 140 + 6 = 5256$
$82 \cdot 83 = (80 + 2) \cdot (80 + 3) = 6400 + 240 + 160 + 6 = 6806$
$92 \cdot 93 = (90 + 2) \cdot (90 + 3) = 8100 + 270 + 180 + 6 = 8556$

(Табл. 1.1)

Во всех этих примерах есть нечто общее; нельзя ли это общее показать вычислительными средствами? Свести все примеры к *одному*? Первым числом в скобках может стоять любой десяток; мы не пишем никакого определенного числа, мы пишем *символ* (выберем *a*), *который может обозначать любое возможное число десятков*. Еще раз: *a* только внешне буква, по смыслу это число десятков, символ числа.

Можно ли оперировать с этим символом? Попробуем: пример, объединяющий все предыдущие, выглядит так:

$$(a + 2) \cdot (a + 3) = a^2 + 3a + 2a + 6$$

В качестве первого промежуточного результата возникает квадрат *a*, затем число из таблицы умножения на 30 (*a* ведь представляет десятки), затем число из таблицы умножения на 20 и наконец 6. Можно ли свести промежуточные результаты воедино? Настолько окончательно, как в числовых примерах, это невозможно. Но $3a + 2a$ — это разве не $5a$? Конечно, ведь $3a + 2a$ означает не что иное, как $(a + a + a) + (a + a)$, а это и есть $5a$. Итак, “окончательный” результат выглядит следующим образом:

$$(a + 2) \cdot (a + 3) = a^2 + 5a + 6$$

В вычислительной практике *a* естественно рассматривать как число десятков. Но нельзя ли выбирать для *a* другие значения? Остается ли в силе общая формула? Подставим вместо *a* какое-нибудь целое число, например 7:

$(a + 2) \cdot (a + 3)$ превращается в $(7 + 2) \cdot (7 + 3) = 9 \cdot 10 = 90$
$a^2 + 5a + 6$ превращается для $a = 7$ в $49 + 35 + 6 = 90$

Систематически проверим правильность формулы, подставляя вместо *a* подряд натуральные числа 1, 2, 3...:

a	$(a + 2) \cdot (a + 3)$	$a^2 + 5a + 6$
1	$(1 + 2) \cdot (1 + 3) = 3 \cdot 4 = 12$	$1 + 5 + 6 = 12$
2	$(2 + 2) \cdot (2 + 3) = 4 \cdot 5 = 20$	$4 + 10 + 6 = 20$
3	$(3 + 2) \cdot (3 + 3) = 5 \cdot 6 = 30$	$9 + 15 + 6 = 30$
4	$(4 + 2) \cdot (4 + 3) = 6 \cdot 7 = 42$	$16 + 20 + 6 = 42$
5	$(5 + 2) \cdot (5 + 3) = 7 \cdot 8 = 56$	$25 + 25 + 6 = 56$
6	$(6 + 2) \cdot (6 + 3) = 8 \cdot 9 = 72$	$36 + 30 + 6 = 72$
7	$(7 + 2) \cdot (7 + 3) = 9 \cdot 10 = 90$	$49 + 35 + 6 = 90$
8	$(8 + 2) \cdot (8 + 3) = 10 \cdot 11 = 110$	$64 + 40 + 6 = 110$
9	$(9 + 2) \cdot (9 + 3) = 11 \cdot 12 = 132$	$81 + 45 + 6 = 132$

(Табл. 1.2)

Совершенно разные вычисления, но при этом всегда одинаковые результаты! Слева мы *умножаем два* числа, справа мы *складываем три* числа — и все же результат тот же. Правда, мы умножаем и складываем не произвольные числа, а совершенно определенные. Мы умножаем числа типа $(a + 2) \cdot (a + 3)$, и результат этого произведения всегда равен сумме $a^2 + 5a + 6$. Суть алгебраической формулы $(a + 2) \cdot (a + 3) = a^2 + 5a + 6$ состоит в том, что она приравнивает определенное *мультипликативное* соединение двух сумм к определенному (внешне совершенно непохожему) *аддитивному* соединению. В конце концов алгебра проясняет идентичность различных соединений чисел. В таблице 1.2 мы подставляли на место *a* числа 1, 2, 3... и получали последовательность результатов 12, 20, 30, 42... Является ли этот ряд случайным, или в его основе лежит некая закономерность? Некоторые ученики быстро замечают: между 12 и 20 приращение 8, между 20 и 30 приращение 10, затем 12 и т.д. А дальше? Дополним нашу таблицу еще одной колонкой, в которой проставим приращение от строки к строке:

a	Результат	Приращение

1	12	8
2	20	10
3	30	12
4	42	14
5	56	16
6	72	18
7	90	20
8	110	22
9	132	

Приращение будет все время увеличиваться на 2. Можно ли предсказать последующие результаты, просто увеличивая приращение на 2, то есть сперва заполнить последнюю колонку?

a	$(a + 2) \cdot (a + 3)$	$a^2 + 5a + 6$	Приращение
9	$(9+2) \cdot (9+3) = 11 \cdot 12 = 132$	$81 + 45 + 6 = 132$	22
10	$(10+2) \cdot (10+3) = 12 \cdot 13 = 156$	$100 + 50 + 6 = 156$	24
11		182	26
12		210	28
13		240	30

Заполните внутренние колонки! (Сильные ученики сами приходят к тому, чтобы вычислить в таблице 1.1 приращения!).

Таблицу 1.2 можно рассматривать как одну большую числовую *взаимосвязь*; ни одно число не выпадает из контекста. Переживание “то, что надо” рождает в учениках определенное чувство правильности счета. Мы должны стремиться к тому, чтобы как можно чаще в учениках возникало это чувство самоуверенности.

После превого введения техники раскрытия скобок, можно прорешать ряд примеров:

$$(a + 4) \cdot (a + 7) = a^2 + 7a + 4a + 28 = a^2 + 11a + 28$$
$$(a + 3) \cdot (a + 8) = a^2 + 8a + 3a + 24 = a^2 + 11a + 24$$
$$(a + 2) \cdot (a + 5) = a^2 + 5a + 2a + 10 = a^2 + 7a + 10$$
$$(2a + 5) \cdot (3a + 6) = 6a^2 + 12a + 15a + 30 = 6a^2 + 27a + 30$$

$(3a + 4) \cdot (5a + 8) = 15a^2 + 24a + 20a + 32 = 15a^2 + 44a + 32$
$(8a + 3) \cdot (9a + 7) = 72a^2 + 56a + 27a + 21 = 72a^2 + 83a + 21$

Для части примеров следует вычислить таблицы значений (типа таблицы 1.2).

Как группируется раскрытие скобок, если в скобках стоят совершенно различные числа? Примеры такого рода мы уже обсчитывали:

$32 \cdot 63 = (30 + 2) \cdot (60 + 3) = 1800 + 90 + 120 + 6 = 2016$

Все алгебраические примеры такого рода можно обобщить в формуле:

$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$

Правило формулируется так: чтобы перемножить две скобки (суммы), нужно перемножить каждое слагаемое первой скобки с каждым слагаемым второй скобки (и затем сложить результаты).

Чтобы привести правило в максимально компактной формуле, следует опустить заключенные в скобки слова, поскольку они почти тривиальны. Подобно растению, которое в течение лета вырастает, рождая стебель, лист и цветок, а затем осенью снова концентрируется в семени, в течение подобной эпохи может “расцвести” и раскрытие скобок чтобы затем сконцентрироваться в таком правиле.

Что еще повстречалось нам на нашем пути? Сложение промежуточных произведений, содержащих одно и то же a:

$8a + 3a = 11a$, $2a + 7a = 9a$ и т.д.

В общем виде: $ba + ca + da + ... = (b + c + d + ...) \cdot a$

Правило: чтобы умножить число на сумму, нужно умножить его на каждое слагаемое.

Сознание учеников пробуждается, когда они сами формулируют подобные правила.

Теперь мы можем на алгебраическом языке сформулировать фундаментальные правила для сложения и умножения,

знакомые нам с первого класса:

Правило 1: слагаемые можно менять местами: $a+b=b+a$;
сомножители можно менять местами: $a \cdot b=b \cdot a$

На специальном языке оба правила называются *коммутативными* законами сложения и умножения. Есть ли аналогичные правила для вычитания и деления? Ни в коем случае! Правда, среди так называемых сверхкомплексных чисел *некоммутативно даже умножение*; на познавательную важность этих чисел указывал Рудольф Штейнер.

Правило 2: более чем два слагаемых (сомножителя) можно складывать (умножать) в любом порядке:

$a + b + c = (a + b) + c$	$3 + 5 + 9 = 8 + 9 = 17$
$a + b + c = a + (b + c)$	$3 + 5 + 9 = 3 + 14 = 17$
$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c$	$2 \cdot 3 \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30$
$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 15 = 30$

На специальном языке: *ассоциативные* законы сложения и умножения.

Обе операции соединены *дистрибутивным* законом:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Благодаря алгебраическому счету *правила вычисления* становятся для нас все яснее. Когда они нам абсолютно ясны, мы приобретаем полную уверенность в счете. Тогда мы переживаем собственное мышление как внутреннюю инстанцию, которая с определенностью говорит нам: “Да, это правильно!” Если нам удастся со временем привести учеников к переживанию этой внутренней инстанции, то они смогут ощутить свою мыслящую сущность.

2. Вынесение за скобки — превращение суммы в произведение

В первой главе мы занимались раскрытием скобок; в скобках стояли *суммы* чисел. Мы установили правило: чтобы перемножить суммы, нужно умножить каждое слагаемое первой суумы на каждое слагаемое второй суммы (и затем сложить промежуточные результаты):

$$(a + b)\cdot(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Слева стоит произведение сумм, справа — сумма произведений.

В этой главе мы займемся противоположной операцией: пусть дана сумма произведений; можно ли преобразовать ее в произведение сумм?

Снова возьмем за исходную точку вычислительную практику: пусть нужно вычислить

$$5 \cdot 9 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 9 = ?$$

Бросается в глаза, что множимым во всех произведениях является 9. Облегчает ли эта особенность вычисления? Нельзя ли попросту сложить множители, а затем сумму умножить на 9?

$$5 \cdot 9 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 9 = (5 + 7 + 8) \cdot 9 = 20 \cdot 9 = 180$$

Проверим себя, сперва вычислив отдельные произведения и затем их сложив:

$$5 \cdot 9 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 9 = 45 + 63 + 72 = 108 + 72 = 180$$

Действительно, получается то же самое; но первое вычисление легче второго.

Еще один пример:

$2 \cdot 15 + 3 \cdot 15 + 5 \cdot 15 = (2 + 3 + 5) \cdot 15 = 10 \cdot 15 = 150$

Это вычисление опять-таки проще, чем:

$2 \cdot 15 + 3 \cdot 15 + 5 \cdot 15 = 30 + 45 + 75 = 150$

Действовать таким образом можно, очевидно, тогда, когда все произведения имеют общий сомножитель. Если складываются различные числа, тогда в них следует выделить этот общий множитель. Пример:

$14 + 21 + 35 = ?$

Нам настолько хорошо знакомы эти числа, что мы сразу же узнаем в них кратные 7:

$14 + 21 + 35 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 7 = (2 + 3 + 5) \cdot 7 = 10 \cdot 7 = 70$

Другие примеры:

$$9 + 15 + 21 + 24 = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 3 = \\ = (3 + 5 + 7 + 8) \cdot 3 = 23 \cdot 3 = 69$$

$$11 + 33 + 44 = 1 \cdot 11 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 11 = (1 + 3 + 4) \cdot 11 = \\ = 8 \cdot 11 = 88$$

Этот процесс называется *вынесением за скобки*: общий множитель записывается *вне* скобок, после или перед ними. В последнем примере общий множитель совпадает с одним из слагаемых. При этом важно обратить внимание на то, что $11 = 1 \cdot 11$, и что множитель “1” должен в качестве одного из слагаемых попасть в скобки.

А как обстоит дело с суммой $4 + 15 + 49 = ?$

Можно ли что-нибудь вынести за скобки? Нет, так как не существует такого числа, которое бы входило общим сомножителем в каждое слагаемое ($4 = 2 \cdot 2$; $15 = 5 \cdot 3$; $49 = 7 \cdot 7$).

Вынесение за скобки является очевидным аналитическим процессом, а раскрытие скобок — синтетическим. Если поочередно заниматься тем и другим, вычислительные навыки приобретают необходимую гибкость.

Алгебраические преобразования могут прояснить процесс вынесения за скобки:

$$ab + ac = a(b + c)$$
$$a^2 + ad = a(a + d)$$
$$a + a^2 = a(1 + a)$$
$$a + a^2 + a^3 = a(1 + a + a^2)$$
$$a^2b + ab^2 = ab(a + b)$$
$$15a + 3a^2 = 3a(5 + a)$$
$$21ab + 35b^2 = 7b(3a + 5b)$$
$$33ab^2 + 22a^2b + 11ab = 11ab(3b + 2a + 1)$$

Существуют ли примеры на перевод суммы в произведение *двух скобок*? Для этого потребуются как минимум четыре слагаемых. Если просто сложить четыре произвольных числа, преобразовать сумму в произведение не удастся. Конечно, можно случайно написать четыре слагаемых, которые возникли из произведения двух скобок, например:

$$(2a + 3b) \cdot (5a + 4) = 10a^2 + 8a + 15ab + 12b$$

Каким образом распознать в сумме произведение? Если обследовать все четыре слагаемых, то в них не отыскать общего множителя. Но из первых двух слагаемых можно выделить общий множитель $2a$, а из третьего и четвертого — $3b$:

$$10a^2 + 8a + 15ab + 12b = 2a \cdot (5a + 4) + 3b \cdot (5a + 4)$$

В обеих скобках стоит одинаковая сумма: эта скобка и будет общим множителем, который можно вынести за скобки:

$$2a \cdot (5a + 4) + 3b \cdot (5a + 4) = (2a + 3b) \cdot (5a + 4)$$

Можно было бы действовать иначе. А именно вынести из первого и третьего слагаемых $5a$, а из второго и четвертого — число 4:

$$10a^2 + 8a + 15ab + 12b = 5a \cdot (2a + 3b) + 4 \cdot (2a + 3b) =$$
$$= (5a + 4) \cdot (2a + 3b)$$

Скобки просто поменялись местами!

Чтобы решать такие примеры в классе, требуется сперва подготовить их дома. Это могут сделать и сами ученики: вче-

ра они раскрывали скобки, сегодня они ищут общие множители. Можно построить и своего рода алгебраический ребус: произведением каких двух скобок является $14a^2 + 35a + 6ab + 15b$? Подобный вопрос может ставить как учитель, так и ученик? Примеры:

$6a^2 + 15a + 14ab + 35b = ?$
$33a^2 + 55a + 6ab + 10b = ?$
$21a^2 + 49a + 15ab + 35b = ?$

В главе 1 нас особенно занимали примеры типа:

$(a + 3) \cdot (a + 7) = a^2 + 7a + 3a + 21 = a^2 + 10a + 21$

Каким образом проделать обратный путь и найти по сумме $a^2 + 10a + 21$ произведение?

$a^2 + 10a + 21 = (\ ) \cdot (\ )$?

Ясно, что в обеих скобках первым слагаемым должно стоять число a.

$a^2 + 10a + 21 = (a +) \cdot (a +)$?

Но как найти остальные слагаемые? Назовем их p и q.

$a^2 + 10a + 21 = (a + p) \cdot (a + q)$

Если мы раскроем скобки, то сразу станет ясно, что $p \cdot q = 21$, а $p + q = 10$. Итак, нужно найти два числа, произведение которых равно 21, а сумма — 10. Только 3 и 7 удовлетворяют таким условиям, следовательно, $a^2 + 10a + 21 = (a + 3) \cdot (a + 7)$.

Попробуем с суммой $a^2 + 7a + 10$. Существует ли равное ей произведение? Существуют ли два числа, произведение которых 10, а сумма 7? Конечно! Это 2 и 5:

$a^2 + 7a + 10 = (a + 2) \cdot (a + 5)$

Так легко, как в этом примере, задача решается не всегда. Рассмотрим $a^2 + 10a + 24 = ?$ Нужно найти два числа, произведение которых равно 24, а сумма — 10. Придется перебрать все варианты, когда произведение двух чисел дает

24: $24 = 2 \cdot 12$, $24 = 3 \cdot 8$, $24 = 4 \cdot 6$. Есть ли среди них пара таких, сумма которых дает 10? Да, $4 + 6 = 10$. Итак,

$$a^2 + 10a + 24 = (a + 4) \cdot (a + 6)$$

Если третье слагаемое равно 24, тогда второе может быть одним из трех:

$$a^2 + 11a + 24 = (a + 3) \cdot (a + 8)$$
$$a^2 + 14a + 24 = (a + 2) \cdot (a + 12)$$
$$a^2 + 25a + 24 = (a + 1) \cdot (a + 24)$$

О третьей возможности легко забывают.

Для семиклассников страшно интересно отыскивать такие пары p и q. Это развивает внутреннюю подвижность и видение числовых взаимосвязей. Примеры:

$a^2 + 9a + 18 =$	$a^2 + 12a + 27 =$
$a^2 + 10a + 16 =$	$a^2 + 5a + 4 =$
$a^2 + 13a + 36 =$	$a^2 + 8a + 7 =$
$a^2 + 11a + 28 =$	$a^2 + 10a + 9 =$

(В последних трех примерах p или q равно 1.)

Отыщи все возможности для второго слагаемого, если дано третье:

$a^2 + ... + 18 =$	$a^2 + ... + 42 =$
$a^2 + ... + 30 =$	$a^2 + ... + 81 =$
$a^2 + ... + 36 =$	$a^2 + ... + 100 =$

Каким может быть третье слагаемое, если дано второе?

$a^2 + 7a + ... =$	$a^2 + 9a + ... =$

Интересны примеры такого рода:

$a^2 + 10a + 25 =$	$a^2 + 18a + 81 =$
$a^2 + 12a + 36 =$	$a^2 + 20a + 100 =$

Третье слагаемое — это полный квадрат, во втором слагаемом a умножается на *удвоенное* основание этого квадрата.

$a^2 + 10a + 25 = a^2 + 2 \cdot 5a + 5^2$
$a^2 + 12a + 36 = a^2 + 2 \cdot 6a + 6^2$
$a^2 + 18a + 81 = a^2 + 2 \cdot 9a + 9^2$
$a^2 + 20a + 100 = a^2 + 2 \cdot 10a + 10^2$

В этом случае p и q одинаковы и равны удвоенному основанию квадрата.

$a^2 + 10a + 25 = (a + 5) \cdot (a + 5) = (a + 5)^2$
$a^2 + 12a + 36 = (a + 6) \cdot (a + 6) = (a + 6)^2$
$a^2 + 18a + 81 = (a + 9) \cdot (a + 9) = (a + 9)^2$
$a^2 + 20a + 100 = (a + 10) \cdot (a + 10) = (a + 10)^2$

Примеры такого рода особенно важны; они очень часто возникают в алгебраических преобразованиях. Чтобы структура таких примеров стала для нас совершенно ясна, обозначим третье слагаемое b^2; второе слагаемое преобразуется тогда в $2ba$. Итак,

$a^2 + 2ba + b^2 = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2$

Важность понимания структуры этой формулы невозможно переоценить. Ее роль в алгебре сравнима разве что с ролью таблицы умножения в арифметике. Эта формула имеет особое название: *биноминальная формула*. Разумеется, ее можно записать и в обратном порядке, поменяв при этом во втором слагаемом местами a и b:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

В таком виде формула приобретает привычное написание и может быть использована для вычисления квадрата суммы:

Квадрат первого слагаемого плюс удвоенное произведение обоих слагаемых плюс квадрат второго слагаемого.

Формулу можно отрабатывать на самых разных примерах:

$11^2 = (10 + 1)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 1 + 1^2 = 100 + 20 + 1 = 121$
$12^2 = (10 + 2)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 2 + 2^2 = 100 + 40 + 4 = 144$
...
$19^2 = (10 + 9)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 9 + 9^2 = 100 + 180 + 81 = 361$

Когда первый этап знакомства прошел, запись можно сократить:

...	...	Приращение
$18^2 = (10 + 8)^2 = 100 + 160 + 64$	$= 324$	
		37
$19^2 = (10 + 9)^2 = 100 + 180 + 81$	$= 361$	
		39
$20^2 =$	$= 400$	
		41
$21^2 = (20 + 1)^2 = 400 + 40 + 1$	$= 441$	
		43
$22^2 = (20 + 2)^2 = 400 + 80 + 4$	$= 484$	
		45
$23^2 = (20 + 3)^2 = 400 + 120 + 9$	$= 529$	
		47
$24^2 = (20 + 4)^2 = 400 + 160 + 16$	$= 576$	
		49
$25^2 = (20 + 5)^2 = 400 + 200 + 25$	$= 625$	
		51
$26^2 = (20 + 6)^2 = 400 + 240 + 36$	$= 676$	
		53
$27^2 = (20 + 7)^2 = 400 + 280 + 49$	$= 729$	
		55
$28^2 = (20 + 8)^2 = 400 + 320 + 64$	$= 784$	
		57
$29^2 = (20 + 9)^2 = 400 + 360 + 81$	$= 841$	
		59
$30^2 =$	$= 900$	
		61
$31^2 = (30 + 1)^2 = 900 + 60 + 1$	$= 961$	
		63
$32^2 = (30 + 2)^2 = 900 + 120 + 4$	$= 1024$	
...	...	

Эти вычисления можно продолжить до 99^2. Ученики обнаружат, что строка $25^2 = 625$ играет роль оси симметрии: над и под ней встречаются числа с одним и тем же “хвостом” 76, 29, 84... Но случайна ли эта симметрия? Мы обнаружим ее причины, если посмотрим на приращение от квадрата к квадрату: от 324 до 361 приращение составляет 37, от 361 до 400 приращение — 39 и т.д. Это следующие друг за другом нечетные числа. Структура полных квадратов особенно прозрачна, если проследить все с самого начала:

$0^2 = 0$

1

$1^2 = 1$

3

$2^2 = 4$

5

$3^2 = 9$
7
$4^2 = 16$
9
$5^2 = 25$
11
$6^2 = 36$
...

Рассмотрим приращения до и после $25^2 = 625$. Это 49 и 51. Вместе они дают ровно 100. Предыдущие приращения — 47 и 53, вместе они тоже дают 100 и т.д. Следовательно, квадраты, расположенные под и над $25^2 = 625$, должны различаться на 100, 200, 300... и потому имеют одинаковые “хвосты”.

Можно увидеть, что полные квадраты подчиняются следующей закономерности: если сложить первые n нечетных чисел, то получится n^2. Пример: $n = 5$;

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

Сумма *подряд стоящих нечетных чисел* может быть представлена и графически (рис. 2.1.). В “уголках” проставлены 1, 3, 5, 7...; их сумма дает последовательные квадраты 1^2, 2^2, 3^2, 4^2...

Рис. 2.1

1			
	3		
		5	
			7

$a \cdot b$	b^2
a^2	$a \cdot b$
a	b

Рис. 2.2

Биноминальную формулу также можно проиллюстрировать гарфически (рис. 2.2.). Но по сути своей это арифметическая, числовая закономерность. Поэтому лучше сперва проработать ее вычислительно, а затем пояснить геометрически.

В этих первых главах мы исключительно складывали и умножали. Вычитание мы оставили на потом. Если мы будем вычитать только меньшие числа из больших, мы останемся в рамках обыкновенного вычитания. В следующей главе мы займемся вычитанием больших чисел из меньших. При этом нам понадобится новое понятие — понятие об *отрицательных* числах.

Замечание к записи: записывая алгебраическое умножение, можно как ставить, так и опускать знак умножения:

$a\,(b + c)$ означает $a \cdot (b + c)$
$(a + 4)(a + 6) = (a + 4) \cdot (a + 6)$
$ab = a \cdot b$

3. Математика и жизнь — первый опыт с отрицательными числами

Введение отрицательных — это процесс, который может растянуться на долгое время. Постепенно можно углублять *понимание противоположного характера* положительных и отрицательных чисел, постепенно ученики приобретают *уверенность в работе* с отрицательными числами.

Где мы встречаемся с отрицательными числами в жизни? В связи с деньгами! Если я хочу приобрести в магазине товар, стоящий 126 марок, а у меня с собой только 100 марок, то хозяин магазина может открыть мне *кредит*, т.е. передать мне товар и договориться о том, когда я восполню недостающие 26 марок.

Если семья хочет построить дом, она должна прикинуть, насколько велики ожидаемые расходы на строительство? Сколько в их распоряжении собственного капитала? Сколько постороннего капитала требуется привлечь? Какими будут проценты? Справится ли семейный бюджет с такой нагрузкой? Проблема не в самих долгах, проблема в том, *как* они возникают: ответственно и продуманно или легкомысленно. Конечно, легкомысленные заимствования приводят к печальным последствиям. Однако в жизни бывают ситуации, когда без посторонних денег не обойтись. Например, некто собирается открыть собственное дело. Ему необходимо оценить, сколько денег потребует основание фирмы, сколько у него уже есть в наличии и сколько ему придется привлечь со стороны. Как правило, привлеченные средства превышают собственные сбережения. Необходимо предвидеть, сколько времени должно будет пройти, прежде чем

предприятие выйдет на тот уровень, когда поступления превысят расходы.

Введению отрицательных чисел, таким образом, должно предшествовать своего рода углубление понимания определенных жизненных ситуаций. В 6-м классе — в связи с процентами. Рудольф Штейнер обращал внимание на то, что ученики 6-го класса обладают утонченным пониманием процентов. Поэтому совершенно естественно в связи с процентами подробно обсудить соответствующие темы.

Если еще при этом не упустить, что мы постоянно оказываемся в долгу перед своими ближними и должны стремиться к тому, чтобы вернуть эти долги, тогда и финансовые обязательства предстают перед нами в новом свете.

Каким образом найти переход от конкретных примеров кредитования к отрицательным числам? Постоянно слышишь: тот или иной в минусе. Что это значит? Соответствующая ситуация возникает в бухгалтерском учете, например в школьной бухгалтерии, когда выплаты в течение года превышают поступления. Передвижение денежных средств совершается через банк: все начисления производят на банковский счет, все отчисления списываются со счета. Ответственные лица, как со стороны банка, так и со стороны школы, внимательно следят за приходом и расходом на счете.

В начале финансового года, когда велики взносы родителей, сумма на счете растет. К концу она стремительно уменьшается — но до какой степени, до нуля? (решающий рубеж!) — или опускается еще ниже — прежде чем не начинают поступать новые взносы? Если второе, то наступает такой момент, когда на счету *меньше, чем ноль*! Как банк, так и школа понимают, что скоро поступления возобновятся. Но первые новые поступления будут съедены *отрицательным* “минусом” счета, пока ситуация не выровняется, не дойдет до нуля — снова та же решающая точка, — и только после этого деньги, которыми фактически может

пользоваться школа, опять начнут накапливаться. Данный процесс касается не только ответственных лиц; хорошо, если он сопереживается всеми учителями и всеми родителями школы. Важная школа духовной и социальной активности и бодрственности — очень важная! Она помогает преодолеть то пассивное состояние, к которому слишком склонно благополучное общество. На самом деле подобная социальная бодрственность должна захватить все более широкие общественные круги: начиная с семьи, затем круг близких родственников, школьное сообщество, жителей округа... вплоть до всего человечества.

Читатель может спросить: “Почему ни слова не сказано о положительных и отрицательных *температурах*? О +6°С или –7°С ? Разве здесь не те же самые понятия “положительного” и “отрицательного”? И разве они берутся *не из жизни*?” Да, конечно, но только номинально! Здесь нет качественного различия, как в случае с долгами и богатством! Положительная и отрицательная температуры — это не более чем теплее или холоднее произвольно выбранной нулевой точки. Когда в физике появились температурные шкалы, была выбрана и нулевая температура, связанная с примечательным явлением природы: при этой температуре жидкая вода превращается в лед. Но сам по себе выбор тем не менее условен; существуют шкалы с другим нулем. Когда температура понижается, становится холоднее, но сама температура не приобретает никакого нового качества. Конечно, этот пример вполне пригоден для упражнений, однако он не может дать настоящего представления о всей противоположности понятий “положительности” и “отрицательности”.

Разумеется, работа с положительными и отрицательными числами может (и должна) быть доведена до абстрактных правил. Однако их ценность зависит единственно только от глубокого внутреннего понимания качественной противоположности положительного и отрицательного. Ниже я

попробую конкретно показать, как это понимание приобретается на уроке.

Сложение и вычитание отрицательных чисел

Итак, в качестве первого примера работы с положительными и отрицательными числами можно взять состояние счета. Если на счету 1000 марок и банку дается поручение оплатить чек в 1200 марок, тогда на счету после оплаты будет –200 марок. Знак “минус” — это памятник совершившегося вычитания 1000 – 1200 = –200. Первый минус в этом выражении — это *знак операции*, приказ: *вычитай*, второй — только *префикс*, подчеркивающий *качество* результата. Мы рассматриваем утреннее состояние счета и сумму поступлений и выплат в течение дня и вычисляем вечернее состояние. Сперва ограничимся совсем простыми числами.

Состояние счета на утро	120	75	–70	–90
Поступления	50	30	130	60
Выплаты	200	80	50	40
Состояние счета на утро	–30	25	10	–70

Соответствующие вычисления:

120 + 50 – 200 = –30
75 + 30 – 80 = +25
–70 + 130 – 50 = +10
–90 + 60 – 40 = –70

В этих примерах следует обратить внимание на то, что мы прибавляем и вычитаем только *положительные* числа. Отрицательные числа возникают только в качестве начального или конечного результата.

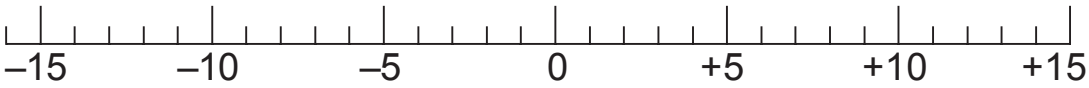
Пока речь идет *только* о приращении и убывании, можно

с тем же успехом оперировать и температурами:

Утренняя температура	15	4	–3	–4
Прирост температуры	7	1	8	14
Падение температуры	12	7	7	2
Вечерняя температура	+10	–2	–2	+8

Соответствующие вычисления:

15 + 7 – 12 = +10
4 + 1 – 7 = –2
–3 + 8 – 7 = –2



–4 + 14 – 2 = +8

Это простое *приращение и убывание* можно отрабатывать и с помощью числовой оси:

Исходная точка	+7	+2	–3	–10
Движение вправо 5	3	8	5	
Движение влево	4	9	4	3
Конечная точка	+8	–4	+1	–8

Соответствующие вычисления:

7 + 5 – 4 = +8
2 + 3 – 9 = –4
–3 + 8 – 4 = +1
–10 + 5 – 3 = –8

Ученики должны научиться свободно двигаться по оси; это дается только упражнениями. Однако не должно быть никаких иллюзий, что при этом вы работаете с отрицательными числами. Прибавляются и вычитаются только положительные числа. И не меняет дела, если исходной или конечной точкой оказывается отрицательное число. Настоящие

вычисления с отрицательными числами вводятся только тогда, когда вы *прибавляете или вычитаете их*. Пример:

$$5 + (-7) = ?$$

Чтобы понять смысл этого действия, *необходимо отнестись к противоположному характеру* операнда, а не просто к относительному положению на числовой оси. Если мыслить в категориях богатства и долгов, тогда смысл всех понятий тотчас проясняется:

5 (богатство) + 7 (долги) = 2 (долги)

Чтобы ближе подойти к необходимым понятиям, будем некоторое время употреблять обозначение Б (богатство) и Д (долги):

5 Б + 7 Д = 2 Д

В жизни почти всегда есть и то и другое: всякий неоплаченный, неважно по какой причине, счет следует рассматривать как долг. Если нас интересует наше финансовое состояние, то мы должны *сложить* все богатства и долги. При этом нам придется работать не с обыкновенными числами:

12 Б + 7 Б + 3 Д = 16 Б
9 Б + 8 Д + 6 Д = 5 Д
21 Б + 17 Д + 31 Б = 35 Б
18 Д + 16 Д + 22 Б = 12 Д

Долго на этом задерживаться не стоит, следует переходить к признакам *положительности* и *отрицательности*:

(+12) + (+ 7) + (– 3) = + 16
(+ 9) + (– 8) + (– 6) = – 5
(+21) + (–17) + (+31) = + 35
(– 18) + (–16) + (+22) = – 12

Следует ясно различать знак перед числом и знак операции. Всюду, где может возникнуть недоразумение, мы заключаем положительные и отрицательные числа в скобки — знак числа намертво срастается с самим числом. Зна-

ки операций находятся вне скобок.

Итак, *сложение* положительных и отрицательных чисел не представляет особых сложностей. Достаточно вернуться к категориям богатства и долга, резюмируя: складываем два богатства и получаем, разумеется, увеличенное богатство:

(+ 7) + (+ 3) = + 12

Равно и сумма двух долгов дает увеличенный долг:

(– 3) + (– 6) = – 9

Богатство и долг вместе дадут богатство, если, конечно, богатство превосходит долг. В противном случае возникнет долг.

(+ 7) + (– 3) = + 4
(+ 2) + (– 9) = – 7

Если мы прибавим к богатству равный по величине долг, то получим совершенно особый результат: “ничто”, на числовом языке это ноль.

(+ 5) + (– 5) = 0
(+ 11) + (– 11) = 0
(+ 123) + (– 123) = 0

Богатство, сложенное с эквивалентным долгом, всегда даст ноль. Это — связующая нить между положительными и отрицательными числами, и в этом смысле она является важнейшим примером сложения. О самом нуле нельзя сказать, положительное это число или отрицательное, это — граница, разделяющая два мира. Богатство суть *количество* с позитивным качеством, долг — *количество* с негативным качеством, ноль — вообще *не количество*, он ни положителен, ни отрицателен.

Рассмотрим теперь *вычитание*, ту операцию, которая как раз и приводит нас к отрицательным числам. Разумеется, от всякого достатка я могу отнять меньший, однако какой-то достаток у меня после этого останется.

(+ 9) – (+ 2) = + 7
(+ 9) – (+ 5) = + 4
(+ 9) – (+ 8) = + 1

Если же я вычитаю все богатство, то возникает качество пустоты, ничто. Именно такой оттенок следует связывать с нулем.

(+ 9) – (+ 9) = 0

И совершенно иное чувство возникает, если я отнимаю от богатства больше, чем оно есть:

(+ 9) – (+ 12) = ?

Для учеников младших классов подобное вычисление попросту не имеет смысла. Семиклассник может, однако, оперировать *новым понятием*: *на 3 меньше, чем ничего*.

(+ 9) – (+ 12) = – 3

Можно ли от *отрицательного* числа отнять положительное? Если мы опять вернемся к счету, то нам немедленно станет ясно, что мы еще глубже залезаем в долги:

(– 3) – (+ 5) = – 8

А что происходит, если нужно *вычесть отрицательное* число? Работает ли понятие долга? Да! Особенно тогда, когда от долга отнимается меньший. Какой-то долг при этом все еще остается, но во всяком случае меньший.

9 Д – 5 Д = 4 Д
(– 9) – (– 5) = – 4

Особенно важен случай, когда из долга вычитается *равный* долг:

9 Д – 9 Д = 0

Допустим, я кому-то должен и мой кредитор решается уничтожить долговую расписку. Богатства у меня при этом не

возникает, однако и долгов больше нет. Кредитор сделал мне подарок, из меньше, чем ничего, он помог мне сделать просто ничто. Арифметически:

$$(-9) - (-9) = 0$$

Если понять, что вычитание, отнимание долга — это по сути *подарок*, тогда становится понятным и случай вычитания из долга большего долга. Прежний долг при этом не просто аннулируется, а появляется определенный достаток:

$$(-9) - (-10) = +1$$
$$(-9) - (-11) = +2$$
$$\ldots$$
$$(-9) - (-15) = +6$$

Из положительного числа также можно отнимать отрицательное:

$$(+2) - (-3) = +5$$

Вычесть долг в три марки означает подарить три марки. Благосостояние растет!

Можно ли постичь вычитание отрицательных чисел исходя из понятия числа и понятия вычитания как таковых, не апеллируя каждый раз к понятию долга и достатка? Да, это возможно, и, по моему убеждению, такое понимание очень плодотворно. Единственно следует ни на секунду не упускать из виду основные факты, центарльные феномены, связанные с вычитанием, а именно *вычесть — это отнять,* и *равное минус равное дает ноль*.

Рассмотрим эти ключевые феномены в связи с обычным вычитанием положительных чисел:

$$(+9) - (+5) =$$

Не будем просто автоматически записывать известный нам результат, сперва осмыслим: каким образом мы к нему пришли? Если мы должны вычесть (+ 5), тогда нам предстоит переосмыслить (+ 9). Оно перестает быть неделимым це-

лым и подразделяется на две части: одна часть это как раз (+5), ее-то и предстоит вычесть. Другая часть (+ 4) остается.

Вычисления выглядят так:

(+9) – (+5) = [(+4) + (+5)] – (+5) = (+4) + [(+5) – (+5)] = +4

Вкратце:

$$(+9) - (+5) = \overbrace{(+4) + \underbrace{(+5) - (+5)}_{0}}^{\text{Части } +9} = +4$$

Идея Рудольфа Штейнера начать преподавание арифметики с разложения числа на части обоснована не только дидактико-педагогически, но и математически. Это разложение становится ключиком как к приобретению навыков, так и к пониманию.

С вычитанием отрицательных чисел дело обстоит аналогично:

(– 9) – (– 5) = ?

Если мы должны отнять (– 5) от целого (– 9), то сначала мы должны разложить (– 9) на части. Если одна из частей (– 5), тогда ее и можно вычесть. Останется (– 4).

$$(-9) - (-5) = \overbrace{(-4) + \underbrace{(-5) - (-5)}_{0}}^{\text{Части } -9} = -4.$$

Основные феномены действуют и среди отрицательных чисел: равное минус равное дает ноль.

Подобный прием работает, даже если от меньшего долга вычитается больший:

(– 3) – (– 5) = ?

И в этом случае число (–5) должно быть увидено как “часть” (–3). Возможно ли это? Конечно, нет, если мы мыслим только

в категории долга. Здесь требуется привлечь также понятие достатка, и тогда целое (–3) можно будет “разложить” на богатство (+ 2) и долг (– 5):

(– 3) – (– 5) = (+ 2) + (– 5) – (– 5) = + 2

Остается достаток (+ 2)!

Семиклассники по сравнению с первоклассниками делают тот шаг вперед, что они научаются мыслить процесс “разложения” в широком смысле: не только как разложение положительного числа на более мелкие положительные составляющие или отрицательного числа на более мелкие отрицательные составляющие; им приходится раскладывать отрицательное число на большие (по модулю) отрицательное и положительное числа.

Тот же принцип сохраняется, когда от положительного числа требуется вычесть отрицательное:

(+ 3) – (– 5) = ?

В целом (+ 3) нужно увидеть (– 5), вычитаемое; иначе говоря, (+ 3) нужно “разложить” на большее положительное (+ 8) и отрицательное (–5):

(+ 3) = (+ 8) + (– 5)

Теперь часть (– 5) можно вычесть из целого:

(+ 3) – (– 5) = (+ 8) + (– 5) – (– 5) = + 8

Достаток растет!

Таким образом, мы учимся различать в финансовых процессах *две* реальности: реальность достояния и реальность долга. Если мы обратимся к финансовым феноменам в ином масштабе — к экономике народов и стран, тогда в бедности одних народов и благосостоянии других мы встретимся с обеими упомянутыми реальностями в их крайнем проявлении.

Существует еще одна область, которая возникает в результате взаимодействия двух реальностей противоположного

рода: это весь органический мир, и прежде всего мир растительный. Только благодаря взаимодействию двух противоположных сил — сил физических и сил эфирных, сил жизне- и формообразующих — может возникнуть видимое растение. Это материал всей старшей школы, не только биологии, но и математики, астрономии, химии!

Ключевая сила физического рода — тяжесть, ключевая сила эфирного рода — свет. Семиклассники могут пережить эти силы в проявлениях тяжести и легкости. Оба понятия очень хороши для того, чтобы соединить с ними “положительно” и “отрицательно” насыщенные переживания. Об этом — в следующей главе!

4. Положительные и отрицательные числа – тяжесть и легкость

Особенно живо можно ощутить противоположные качества *тяжести* и *легкости*. В последние столетия внимание людей было направлено исключительно на тяжесть. Даже движение планет со времен Ньютона рассматривалось в целом с точки зрения сил гравитации. Он и его последователи все точнее и точнее исследовали действие сил тяжести и вывели математические формулы, с помощью которых смогли это действие описать. Полет спутников целиком базируется на этих формулах.

Сейчас самое время обратить наше внимание на противоположную силу. В царстве мертвого, на исследование которого нацелена физика, ее, впрочем, не отыскать. Она действует в мире живого: недаром все растения растут против силы тяжести, да и внутри самого растения движение соков происходит от корней к листьям. В большом дереве ежедневно перемещаются вверх огромные водные массы. Материя внутри живого организма подпадает под действие не только физических сил, например силы тяжести, но и других сил — эфирных образующих сил, которые только создают и поддерживают жизнь в видимом растении. Эти силы глубоко связаны с солнцем, без которого не может расти ни одно растение. Именно воздействие солнца выманивает растения из земли и вкладывает в них силу роста. Мы находимся еще только в самом начале исследования образующих сил; однако среди работ антропософски ориентированных естествоиспытателей и математиков встречаются такие, которые дают определенную надежду на то, что познание жизненных и образующих процессов будет со временем все глубже и что при этом смогут развиться те нравственные силы,

которые требуются нам, дабы ответственно взаимодействовать с природой.

Семиклассники еще имеют некоторое инстинктивное понимание тяжести и легкости. В младших классах ученики живут преимущественно в *легкости*; когда они бегут по школьному двору, возникает ощущение, что они почти не чувствуют тяжести. Противоположное впечатление производят некоторые девяти- и десятиклассники; когда они грузно усаживаются на стулья, такое чувство, что они — сама *тяжесть*. Легкость должна быть обретена ими теперь изнутри — благодаря тому полету мыслей, который особенно возможен в 11-м и 12-м классах.

Семиклассники давно уже не первоклассники, но еще не столь тяжелы, как девятиклассники. Они чувствуют и то и другое. В связи с этим на уроках рассматривается положительное и отрицательное. Тяжесть можно рассматривать как положительное, легкость — как отрицательное (без известного негативного привкуса, связанного с самим словом). Ведь богатство, в явном, денежном виде лежащее у нас на ладони, имеет вес; долги же — это нечто легковесное. Во всяком случае, в моральном смысле.

Если с тяжестью и легкостью предстоит вычислительная работа, то нужно подобрать подходящие обозначения. Адекватным символом тяжести является чаша весов с грузом; для легкости подходящий символ подобрать труднее, ибо она действует в органическом мире — ну как ее зафиксируешь? Возьмем образ воздушного шара: если шар удерживает груз в 5 кг, то он действует с этой силой вверх. Правда, тяга воздушного шара — это еще не настоящая легкость. Это выталкивающая сила, которая действует на шар со стороны более тяжелого окружающего воздуха, т.е. по природе своей давление.

Однако образ рождает в нас соответствующее ощущение: мы ощущаем тяжесть камня и переживаем подъемную силу шара. Если же мы ограничиваемся одним шаром, тогда в нас возникает ощущение легкости. Представим себе, что в руке у

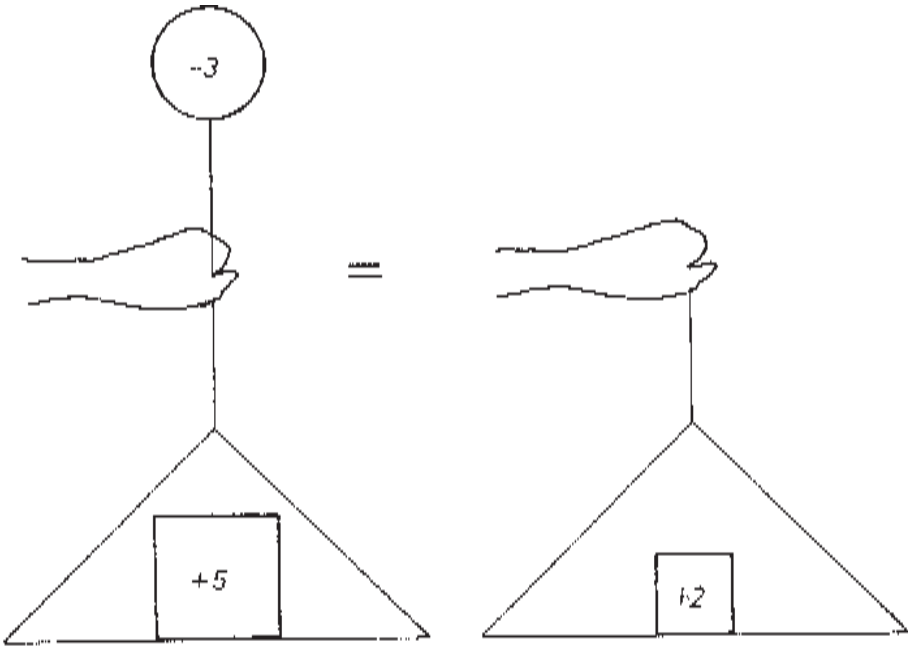


Рис. 4.1. “Тяжесть” 5 и “легкость” 3 вместе действуют как “тяжесть” 2: (+5)+(–3)=+2

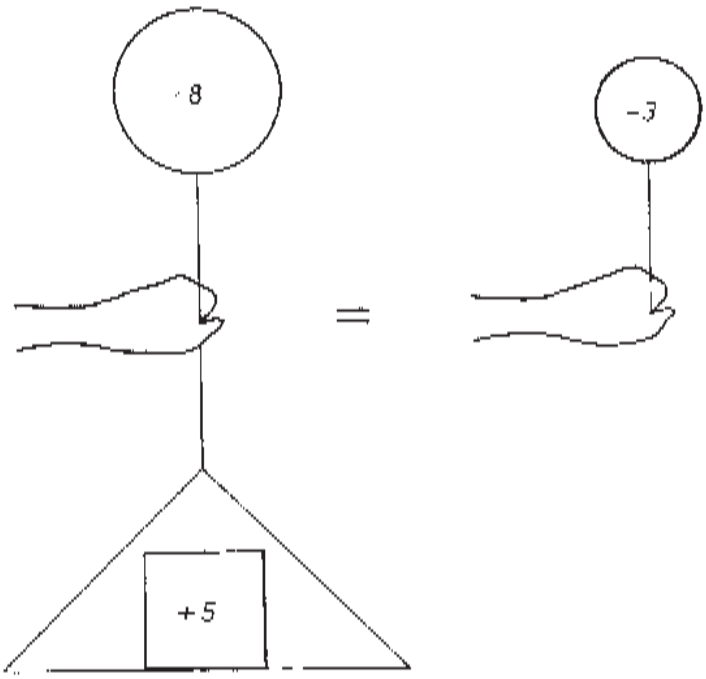


Рис. 4.2. “Тяжесть” 5 и “легкость” 8 вместе действуют как “легкость” 3: (+5)+(–8) = –3

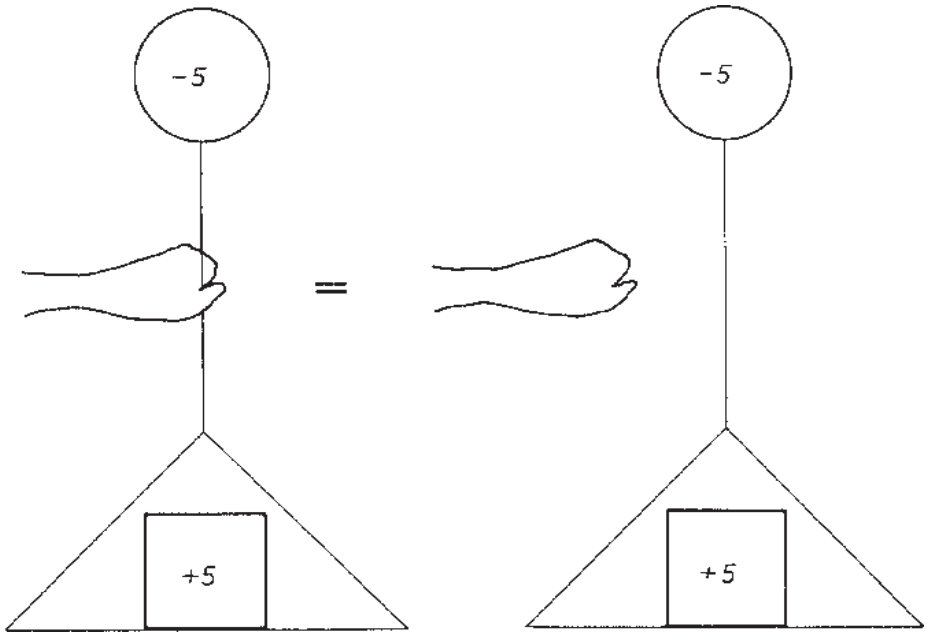


Рис. 4.3. “Тяжесть” 5 и “легкость” 5 уравновешиваются: (+5)+(–5)=0

нас цепь, на которой крепится чаша с грузом, и нить, удерживающая воздушный шар. Для краткости будем называть связку груза и шара *диполем*. Рука чувствует либо стремление вверх — и тогда в диполе перевешивает тяжесть; либо стремление вниз — тогда перевешивает легкость. Если никакого чувства вообще не возникает — тогда тяжесть и легкость в точности уравновешены (рис. 4.1—4.3).

Если при этом цепь и нить связаны — тогда держать их рукой нет нужды и диполь на рис. 4.3 можно отпустить; он будет просто парить в воздухе.

Можно возразить, что подобные эксперименты чисто умозрительны. Конечно. Но Рудольф Штейнер постоянно советовал развивать пробуждающуюся силу суждения, вооружив ее крыльями фантазии (вспомним примеры, связанные с теоремой Пифагора и рассмотрением глаза на модели камеры-обскуры — 14-я лекция “Общего человековедения”).

Вышеприведенный образ без труда иллюстрирует *сложение* положительных и отрицательных чисел простым взаимодействием тяжести и легкости.

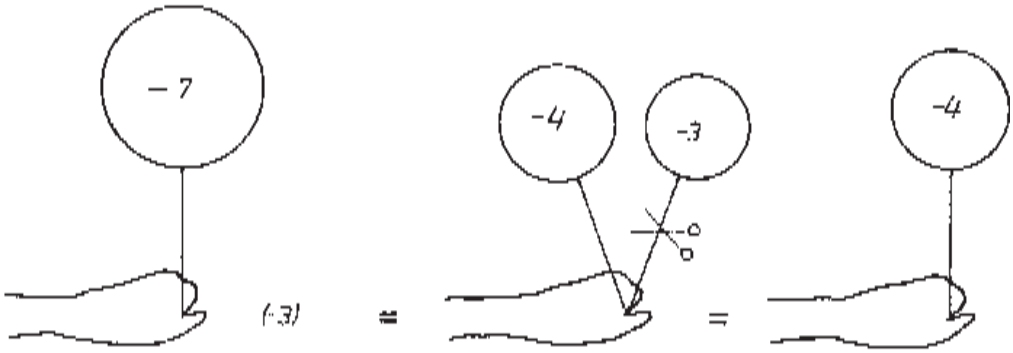


Рис. 4.4: Голый счет дает следующее: $(-7)-(-3)=\overbrace{(-4)+\underbrace{(-3)-(-3)}_{0}}^{(-7)}=(-4)$

Можно ли столь же реально пережить *вычитание*? Например: (–7) – (–3) = ? Снова нужно разложить (–7) — уменьшаемое — на две части: (–7) = (–4) + (–3); (–3) можно теперь удалить, остается (–4). Вычитание (–3) реализовано, когда перерезана нить шара (рис. 4.4).

Если мы должны отнять от “легкости” 7 “легкость” 9, тогда нам необходимо заменить “легкость” 7 на диполь (“легкость” 9 и “тяжесть” 2); после этого “легкость” 9 отнимается и остается “тяжесть” 2 (рис. 4.5).

Чтобы от “тяжести” 1 отнять “легкость” 2, необходимо увеличить “тяжесть” 1 до 3, правда уравновесив “легкостью” 2 (рис. 4.6).

На этом примере ясно чувствуется: “тяжесть” 1 разделяется на “тяжесть” 3 и “легкость” 2; затем “легкость” отнимается и остается “тяжесть”.

$$(+1)-(-2)=\overbrace{(+3)+\underbrace{(-2)-(-2)}_{0}}^{(+1)}=(+3)$$

Конечно, не всякое вычитание можно объяснить столь под-

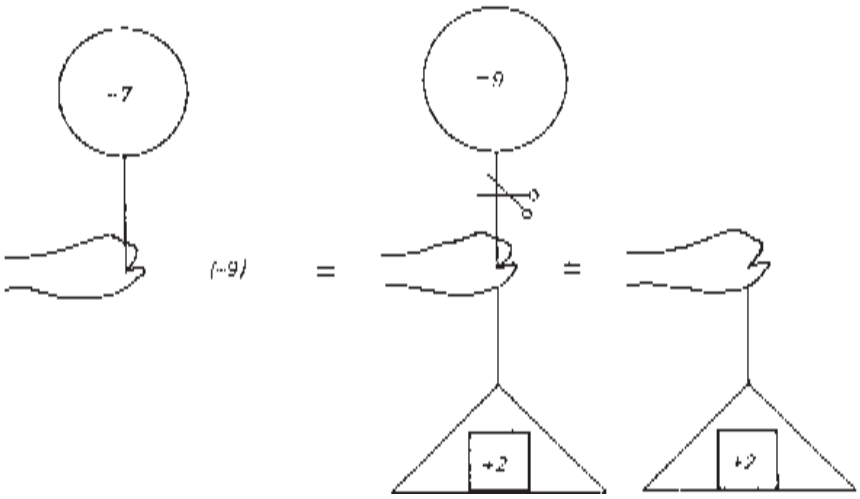


Рис. 4.5: Голый счет дает следующее: $(-7)-(-9)=\overbrace{(+2)+\underbrace{(-9)-(-9)}_{0}}^{(-7)}=(+2)$

робно; детальные рассмотрения можно превратить в правило: чтобы вычесть отрицательное число, нужно прибавить соответствующее положительное.

Однако для развития чувства истины очень важно, чтобы ученики и, конечно, мы, учителя, однажды (а лучше несколько раз) вполне продумали и убедились в корректности

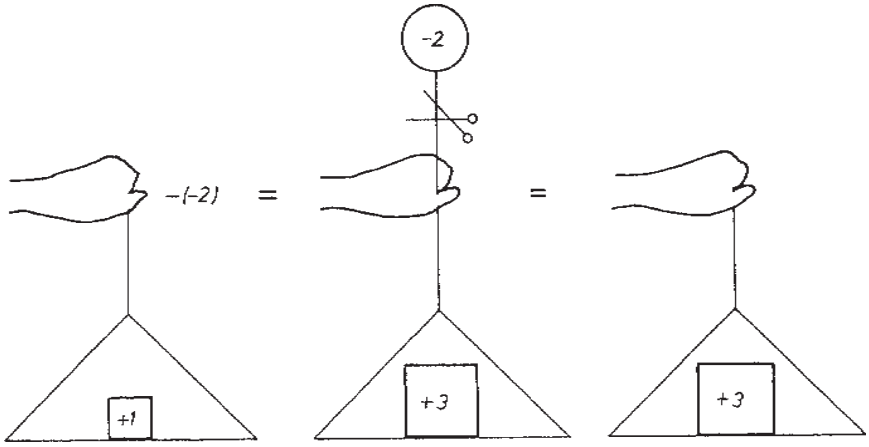


Рис. 4.6

вычитания отрицательных чисел. Беда только, что мы слишком легко устремляемся к псевдообъяснениям типа: не не делать, означает что-то делать. Такие афоризмы обладают некоторой убедительностью и в этом смысле полезны, однако доказательной силы они не имеют. Или: минус на минус дает плюс. Однако если *вычитается отрицательное* число, то это *не* минус на минус; например, 7 – (–3) — где здесь умножение? Его нет! Если умножение — тогда пример должен выглядеть так: 7 + (– 1) · (– 3); конечно, результат тот же + 10. Но путь к нему совсем иной! Сегодня, когда мышление и без того грешит неряшливостью, точные рассмотрения подобных примеров являются теми упражнениями, которые могут помочь в воспитании точного мышления у учеников и у самого учителя.

Но еще важнее ощущения: противоположные качества — противоположные ощущения. Когда Рудольф Штейнер, опираясь на результаты духовного исследования, говорил о Солнце, он указывал, что мы не можем мыслить его материальным подобно другим небесным телам, например планетам. Конечно, поверхность Солнца — это газ, тонкая материя, значит, она действует с определенным давлением. Однако внутри Солнца не просто нет материи, там сама противоположность материи — “вещественность” с противоположными качествами: она не давит, а всасывает. Поэтому неудивительно, что излучение радаров, направленных на Солнце, не возвращается обратно.

Очень важно для будущего суметь совершенно предметно мышлением и чувством подойти к таким противоположностям. Не упустим же такую возможность, предоставляемую нам математикой положительных и отрицательных чисел.

5. Умножение и деление с отрицательными числами – как мы приходим к тому, что “минус на минус дает плюс”?

Для понимания умножения и деления с положительными и отрицательными числами снова оттолкнемся от вычислений. 3×58 может быть вычислено двумя способами: либо $3\cdot(50 + 8)$, либо $3\cdot(60 – 2)$.

$3\cdot58 = 3\cdot(50 + 8) = 3\cdot50 + 3\cdot8 = 150 + 24 = 174$
$3\cdot58 = 3\cdot(60 – 2) = 3\cdot60 + 3\cdot(–2) = 180 – 6 = 174$

Аналогично

$8\cdot37 = 8\cdot(30 + 7) = 8\cdot30 + 8\cdot7 = 240 + 56 = 296$
$8\cdot37 = 8\cdot(40 – 3) = 8\cdot40 + 8\cdot(–3) = 320 – 24 = 296$

Подобные рассуждения показывают, что $3\cdot(–2) = –6$ и $8\cdot(–3) = –24$, и приводят к правильным результатам. По смыслу это также легко понять, поскольку $3\cdot(–2) = (–2) + (–2) +(–2) = –6$.

Если мы трижды берем в долг 2 марки, то наш совокупный долг доходит до 6 марок. Отрицательное число, взятое положительное число раз, даст соответствующее отрицательное произведение.

Действительно, трудный это вопрос вычислить $(–4) \cdot 9 = ?$ Что вообще значит взять положительное число отрицательное количество раз? Действительно содержательный ответ вообще-то не так уж и просто дать; к нему мы вернемся позже. Естественно, мы предполагаем, что $(–4) \cdot 9 = –36$. Однако в своих предположениях мы не можем просто положиться на коммутативный закон умножения ($a \cdot b = b \cdot a$), поскольку мы

установили его справедливость только для положительных чисел. Как поведут себя отрицательные, мы, строго говоря, не знаем. В 1-й главе мы уже указывали, что существуют числа особого рода, на которые закон коммутативности не распространяется. Однако оставим пока наши предположения и вернемся к вычислениям:

$$26 \cdot 9 = (20 + 6) \cdot 9 = 20 \cdot 9 + 6 \cdot 9 = 180 + 54 = 234$$
$$26 \cdot 9 = (30 - 4) \cdot 9 = 30 \cdot 9 - 4 \cdot 9 = 270 - 36 = 234$$

Сравнение этих двух строк подкрепляет наши догадки. Проверим их на примере с двумя смешанными произведениями:

$$28 \cdot 23 = (30 - 2) \cdot (20 + 3) = 30 \cdot 20 + 30 \cdot 3 + (-2) \cdot 20 + (-2) \cdot 3 = \\ = 600 + 90 - 40 - 6 = 644$$

То же умножение, только с одними положительными числами:

$$28 \cdot 23 = (20 + 8) \cdot (20 + 3) = 20 \cdot 20 + 20 \cdot 3 + 8 \cdot 20 + 8 \cdot 3 = \\ = 400 + 60 + 160 + 24 = 644$$

Опять-таки наши предположения подтверждаются.

Перейдем к самому трудному примеру: отрицательное число умножается на отрицательное: $(-3) \cdot (-4) = ?$ В конкретных вычислениях он возникает, например, в случае:

$$17 \cdot 26 = (20 - 3) \cdot (30 - 4) = 20 \cdot 30 + 20 \cdot (-4) + (-3) \cdot 30 + (-3) \cdot (-4) = \\ = 600 - 80 - 90 + (-3) \cdot (-4) = 430 + (-3) \cdot (-4)$$

Мы действовали очень осторожно; мы опирались только на уже проверенные результаты. Чему равно $(-3) \cdot (-4)$, оставим пока без ответа.

Решим тот же самый пример с одними положительными числами:

$$17 \cdot 26 = (10 + 7) \cdot (20 + 6) = 10 \cdot 20 + 10 \cdot 6 + 7 \cdot 20 + 7 \cdot 6 = \\ = 200 + 60 + 140 + 42 = 442$$

Итак, первое вычисление даст нам правильный результат, если $(-3) \cdot (-4) = 12$. Тогда $430 + 12 = 442$.

Естественно, одним примером в классе не ограничиться:

$$\begin{aligned} 28 \cdot 37 &= (30 - 2) \cdot (40 - 3) = \\ &= 30 \cdot 40 + 30 \cdot (-3) + (-2) \cdot 40 + (-2) \cdot (-3) = \\ &= 1200 - 90 - 80 + (-2) \cdot (-3) = 1030 + (-2) \cdot (-3) \end{aligned}$$

Сравним:

$$\begin{aligned} 28 \cdot 37 &= (20 + 8) \cdot (30 + 7) = 20 \cdot 30 + 20 \cdot 7 + 8 \cdot 30 + 8 \cdot 7 = \\ &= 600 + 140 + 240 + 56 = 1036 \end{aligned}$$

Сравнивая оба примера, получаем $(-2) \cdot (-3) = 6$, поскольку $1030 + 6 = 1036$.

Мы проделали вычисления, в которых “минус на минус” появляется как промежуточный результат; вычисления с положительными числами позволили нам сделать вывод, что “минус на минус” дает плюс.

К аналогичному результату приводит таблица:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-4) &= -12 \\ 2 \cdot (-4) &= -8 \\ 1 \cdot (-4) &= -4 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Умножение положительного числа на отрицательное число никаких проблем не содержит. Результат верен и понятен. Мы можем продолжить таблицу: слева мы уменьшали сомножитель все время на 1, справа результат уменьшался на 4 (от –12 к –8, от –8 к –4). Продолжим в том же духе:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-4) &= -12 \\ 2 \cdot (-4) &= -8 \\ 1 \cdot (-4) &= -4 \\ 0 \cdot (-4) &= 0 \\ (-1) \cdot (-4) &= +4 \\ (-2) \cdot (-4) &= +8 \end{aligned}$$

$(-3) \cdot (-4) = +12$

...

Логика таблицы приводит нас к тому же результату: “минус на минус дает плюс”.

Из предыдущих примеров вырастают правила:

$+ \cdot + = +$

$+ \cdot - = -$

$- \cdot + = -$

$- \cdot - = +$

Конечно, это надо понимать символически; знаки нельзя перемножать. Однако для учеников правила в таком виде легче запоминаются. Все четыре правила можно собрать в одно: если перемножаются два числа с *одинаковым* знаком, результат *положителен*; умножение двух чисел с *разным* знаком дает *отрицательный* результат.

Проверим эти правила на примерах:

В главе 1 мы учились раскрывать скобки и получали, например, следующий результат: $(a + 2) \cdot (a + 3) = a^2 + 5a + 6$. Затем вместо a мы подставляли подряд натуральные числа 1, 2, 3... (табл. 1.2.). Повторим начало этой таблицы:

a	$(a + 2) \cdot (a + 3)$	$a^2 + 5a + 6$
1	$(1 + 2) \cdot (1 + 3) = 3 \cdot 4 = 12$	$1 + 5 + 6 = 12$
2	$(2 + 2) \cdot (2 + 3) = 4 \cdot 5 = 20$	$4 + 10 + 6 = 20$
3	$(3 + 2) \cdot (3 + 3) = 5 \cdot 6 = 30$	$9 + 15 + 6 = 30$

А нельзя ли вместо a подставлять отрицательные числа? Например, $a = -9$, затем $a = -8$, $a = -7$ и т.д.? В этой последовательности следующее число на 1 больше, чем предыдущее, действительно, $-9 + 1 = -8$, $-8 + 1 = -7$ и т.д. Особенно полезно задуматься над тем, какой результат получится после возведения отрицательного числа в квадрат, например:

$(-9)^2 = (-9)\cdot(-9) = ?$

После того, как мы все это проделали, произведение двух

отрицательных чисел должно дать число положительное; итак, будем иметь в виду, что$(-9)^2 = 81$, и посмотрим, к чему это приведет.

(Табл. 5.1)

a	$(a + 2) \cdot (a + 3)$	$a^2 + 5a + 6$	
–9	$(-9 + 2) \cdot (-9 + 3) = (-7) \cdot (-6) = +42$	$81 - 45 + 6 = +42$	–12
–8	$(-8 + 2) \cdot (-8 + 3) = (-6) \cdot (-5) = +30$	$64 - 40 + 6 = +30$	–10
–7	$(-7 + 2) \cdot (-7 + 3) = (-5) \cdot (-4) = +20$	$49 - 35 + 6 = +20$	– 8
–6	$(-6 + 2) \cdot (-6 + 3) = (-4) \cdot (-3) = +12$	$36 - 30 + 6 = +12$	– 6
–5	$(-5 + 2) \cdot (-5 + 3) = (-3) \cdot (-2) = +6$	$25 - 25 + 6 = +6$	– 4
–4	$(-4 + 2) \cdot (-4 + 3) = (-2) \cdot (-1) = +2$	$16 - 20 + 6 = +2$	– 2
–3	$(-3 + 2) \cdot (-3 + 3) = (-1) \cdot (0) = 0$	$9 - 15 + 6 = 0$	0
–2	$(-2 + 2) \cdot (-2 + 3) = 0 \cdot 1 = 0$	$4 - 10 + 6 = 0$	+ 2
–1	$(-1 + 2) \cdot (-1 + 3) = 1 \cdot 2 = 2$	$1 - 5 + 6 = 2$	+ 4
0	$(0 + 2) \cdot (0 + 3) = 2 \cdot 3 = 6$	$0 + 0 + 6 = 6$	+ 6
1	$(1 + 2) \cdot (1 + 3) = 3 \cdot 4 = 12$	$1 + 5 + 6 = 12$	+ 8
2	$(2 + 2) \cdot (2 + 3) = 4 \cdot 5 = 20$	$4 + 10 + 6 = 20$	+10
3	$(3 + 2) \cdot (3 + 3) = 5 \cdot 6 = 30$	$9 + 15 + 6 = 30$	+12
4	$(4 + 2) \cdot (4 + 3) = 6 \cdot 7 = 42$	$16 + 20 + 6 = 42$	

Каковы же результаты рассмотрения данной таблицы?

1. Как бы мы ни вычисляли произведение, с помощью ли $(a + 2) \cdot (a + 3)$ или $a^2 + 5a + 6$, результат при подстановке отрицательного a не меняется.
2. Таблица, полученная для положительных значений a, при переходе через 0 без всяких проблем вливается в таблицу, полученную для отрицательных значений a. Это ясно из рассмотрения приращений. В столбце значений a приращение от строки к строке всегда +1. А в столбце результатов? Вначале результаты убывают. Поскольку “приращения” отрицательны: 42 + (–12) = 30, 30 + (–10) = 20, 20 + (–8) = 12 и т.д. Но сами приращения постоянно

увеличиваются на 2: (–12) + 2 = = –10, (–10) + 2 = (–8), (–8) + 2 = (–6) и т.д. Ощущение четкой закономерности возрастает. Подобный опыт укрепляет наше доверие к правилам. Положительные и отрицательные числа начинают соединяться и образовывать единое числовое пространство целых чисел.

Дальнейшие рассмотрения можно продолжить на следующих примерах:

$(a + 5) \cdot (a - 3) = a^2 - 3a + 5a - 15 = a^2 + 2a - 15$
$(a + 2) \cdot (a - 5) = a^2 - 5a + 2a - 10 = a^2 - 3a - 10$
$(a - 3) \cdot (a - 4) = a^2 - 4a - 3a + 12 = a^2 - 7a + 12$

Подставим вместо *a* последовательность отрицательных и положительных чисел (табл. 5.2, 5.3, 5.4).

(Табл. 5.2)

a	$(a + 5) \cdot (a - 3)$	$a^2 + 2a - 15$	
–7	(–7 + 5) · (–7 – 3) = (–2) · (–10) = 20	49 – 14 – 15 = 20	–11
–6	(–6 + 5) · (–6 – 3) = (–1) · (–9) = 9	36 – 12 – 15 = 9	– 9
–5	(–5 + 5) · (–5 – 3) = 0 · (–8) = 0	25 – 10 – 15 = 0	– 7
–4	(–4 + 5) · (–4 – 3) = 1 · (–7) = – 7	16 – 8 – 15 = – 7	– 5
–3	(–3 + 5) · (–3 – 3) = 2 · (–6) = – 12	9 – 6 – 15 = – 12	– 3
–2	(–2 + 5) · (–2 – 3) = 3 · (–5) = – 15	4 – 4 – 15 = – 15	– 1
–1	(–1 + 5) · (–1 – 3) = 4 · (–4) = – 16	1 – 2 – 15 = – 16	1
0	(0 + 5) · (0 – 3) = 5 · (–3) = – 15	0 + 0 – 15 = – 15	3
1	(1 + 5) · (1 – 3) = 6 · (–2) = – 12	1 + 2 – 15 = – 12	5
2	(2 + 5) · (2 – 3) = 7 · (–1) = – 7	4 + 4 – 15 = – 7	7
3	(3 + 5) · (3 – 3) = 8 · 0 = 0	9 + 6 – 15 = 0	9
4	(4 + 5) · (4 – 3) = 9 · 1 = 9	16+ 8 – 15 = 9	11
5	(5 + 5) · (5 – 3) = 10 · 2 = 20	25+10 – 15 = 20	

(Табл. 5.3)

a	$(a + 2) \cdot (a - 5)$	$a^2 - 3a - 10$	
–4	(–4 + 2) · (–4 – 5) = (–2) · (–9) = 18	16 + 12 – 10 = 18	– 10

–3	(–3 + 2) · (–3 – 5) = (–1) · (–8) = 8	9 + 9 – 10 = 8	
–2	(–2 + 2) · (–2 – 5) = 0 · (–7) = 0	4 + 6 – 10 = 0	– 8
–1	(–1 + 2) · (–1 – 5) = 1 · (–6) = – 6	1 + 3 – 10 = – 6	– 6
0	(0 + 2) · (0 – 5) = 2 · (–5) = – 10	0 – 0 – 10 = – 10	– 4
1	(1 + 2) · (1 – 5) = 3 · (–4) = – 12	1 – 3 – 10 = – 12	– 2
2	(2 + 2) · (2 – 5) = 4 · (–3) = – 12	4 – 6 – 10 = – 12	0
3	(3 + 2) · (3 – 5) = 5 · (–2) = – 10	9 – 9 – 10 = – 10	2
4	(4 + 2) · (4 – 5) = 6 · (–1) = – 6	16 –12 – 10 = – 6	4
5	(5 + 2) · (5 – 5) = 7 · 0 = 0	25 –15 – 10 = 0	6
6	(6 + 2) · (6 – 5) = 8 · 1 = 8	36 –18 – 10 = 8	8
7	(7 + 2) · (7 – 5) = 9 · 2 = 18	49 –21 – 10 = 18	10

(Табл. 5.4)

a	$(a – 3) \cdot (a – 4)$	$a^2 – 7a + 12$	
–2	(–2 – 3) · (–2 – 4) = (–5) · (–6) = 30	4 + 14 + 12 = 30	– 10
–1	(–1 –3) · (–1 – 4) = (–4) · (–5) = 20	1 + 7 + 12 = 20	– 8
0	(0 – 3) · (0 – 4) = (–3) · (–4) = 12	0 – 0 + 12 = 12	– 6
1	(1 – 3) · (1 – 4) = (–2) · (–3) = 6	1 – 7 + 12 = 6	– 4
2	(2 – 3) · (2 – 4) = (–1) · (–2) = 2	4 – 14 + 12 = 2	– 2
3	(3 – 3) · (3 – 4) = 0 · (–1) = 0	9 – 21 + 12 = 0	0
4	(4 – 3) · (4 – 4) = 1 · 0 = 0	16 – 28 + 12 = 0	2
5	(5 – 3) · (5 – 4) = 2 · 1 = 2	25 – 35 + 12 = 2	4
6	(6 – 3) · (6 – 4) = 3 · 2 = 6	36 – 42 + 12 = 6	6
7	(7 – 3) · (7 – 4) = 4 · 3 = 12	49 – 49 + 12 = 12	8
8	(8 – 3) · (8 – 4) = 5 · 4 = 20	64 – 56 + 12 = 20	10
9	(9 – 3) · (9 – 4) = 6 · 5 = 30	81 – 63 + 12 = 30	

Опять-таки правило знаков являет образец логичности.

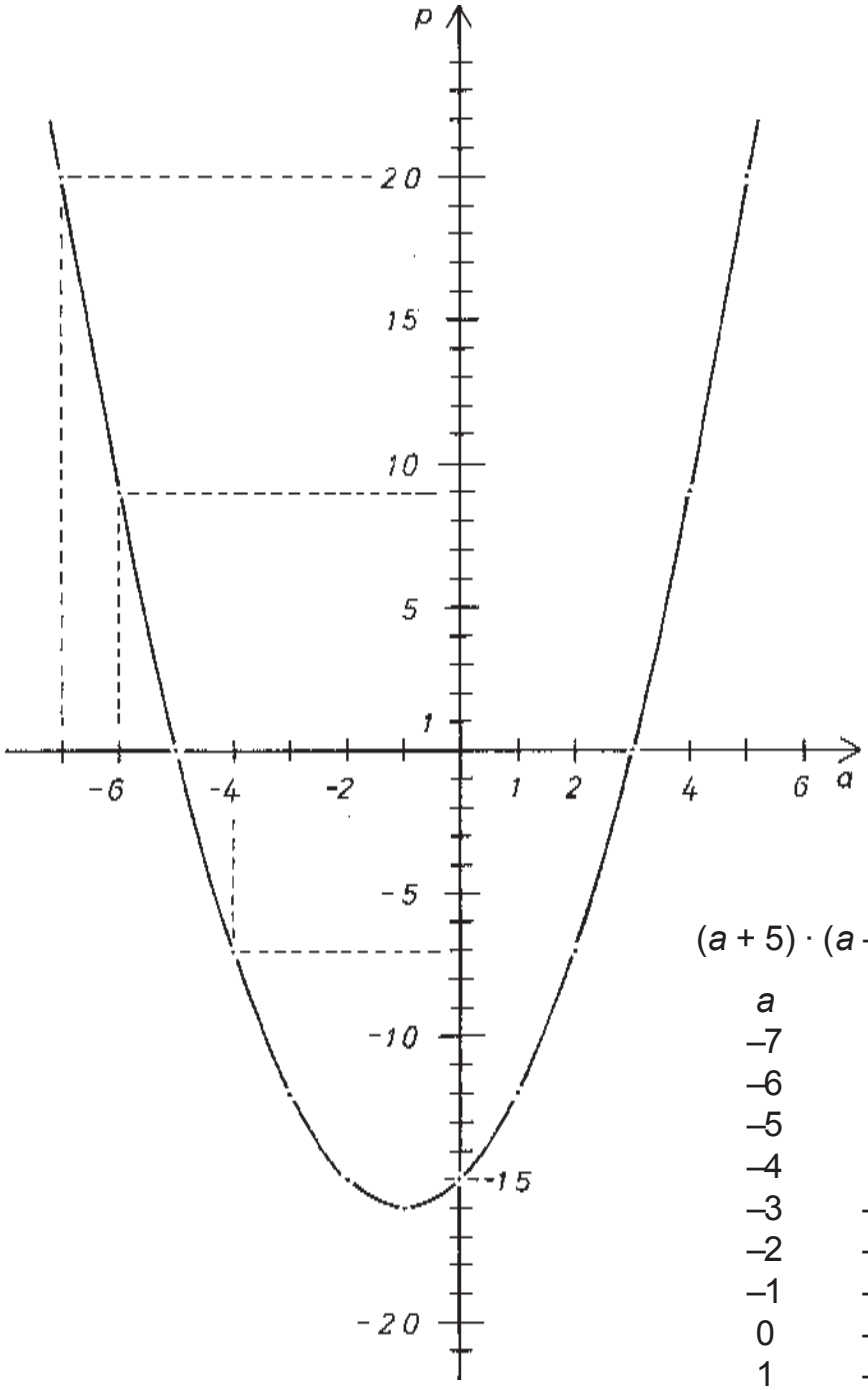
По поводу таблицы 5.2: столбец результатов симметричен относительно строки a = –1, результат = –16. Однако следует обратить внимание на то, что результат –15 над и под составляется из совершенно разных слагаемых — над:

–15 = 4 – 4 – 15, под: – 15 = 0 + 0 – 15. То же самое относится и к остальным результатам.

Каждый пример — это целая серия вычислений. Для семи- и восьмиклассников они представляют важный тренировочный материал. В старшей школе эта тема рассматривается с совершенно иной стороны. В 9-м классе задача ставится следующим образом: как найти значение *a*, приводящее к заданному результату? Например, для какого *a* выражение $a^2 - 16a + 80 = 20$ ($a = 10$ и $a = 6$)? Такая постановка вопроса приводит к квадратным уравнениям. В системе координат таблицы превращаются в изображение параболы; в 11-м классе это должно дать повод для аналитического рассмотрения этой кривой. В 11-м классе нас будет интересовать отношение между приращением столбца результатов и столбца значений *a*. Это приведет нас к рассмотрению динамики процессов роста и, с уменьшением шага, к дифференциальному исчислению. Таким образом, таблица таит в себе большие возможности. А ведь стремлением Рудольфа Штейнера было такое рассмотрение материала, которое бы органически развивалось от класса к классу.

Но и для семи-восьмиклассников это не просто вычислительный материал. Они уже могут познакомиться с образом параболы. Ибо до возраста полового созревания преподавание уместно облекать в образную форму. Чем интенсивнее ученики в возрасте до пубертата переживают образы, тем глубже предпосылки к тому, что после данного рубежа они смогут с помощью этих образов перейти от знания к познанию: в данном случае от простого образа параболы к познанию ее законов, как чисто геометрических, так и аналитических.

Как мы приходим к параболе? Поясним это на примере $(a + 5) \cdot (a - 3)$ и таблицы 5.2. Значения *a* будем понимать как температуру, равно как и значения $p = (a + 5) \cdot (a - 3)$, считанные с горизонтального и вертикального термометров



$(a + 5) \cdot (a - 3) = p$

a	p
–7	20
–6	9
–5	0
–4	–7
–3	–12
–2	–15
–1	–16
0	–15
1	–12
2	–7
3	0
4	9
5	20

Рис. 5.1

(рис. 5.1). Градуировка обеих шкал может совпадать или различаться. На рисунке 5.1 шаг горизонтальной шкалы в 2 раза превосходит шаг вертикальной. Они равны, например, 1 и 0,5 см. К каждой паре (*a,p)* мы можем поставить в соответствие некоторую точку. Первая пара (–7,20). Через точку –7 оси *a* мы проводим вертикальную прямую, через точку 20 оси *p* — горизонтальную. Получаем точку их пересечения. Строим остальные и обнаруживаем, что точки чудесным образом упорядочены на плоскости. Наш взгляд сам собой скользит от точки к точке. Мы беремся за карандаш и соединяем их — возникает кривая, которая определенным образом доходит до низшей точки и затем постепенно поднимается вверх (причем подъем симметричен спуску). Такую кривую называют *параболой*. Впечатление, что все значения таблицы представляют собой единое целое, усиливается: если мы ошибемся в расчетах или неправильно построим какую-то точку, мы тотчас заметим диссонанс — она выпадает из единого строя и нарушает общий порядок.

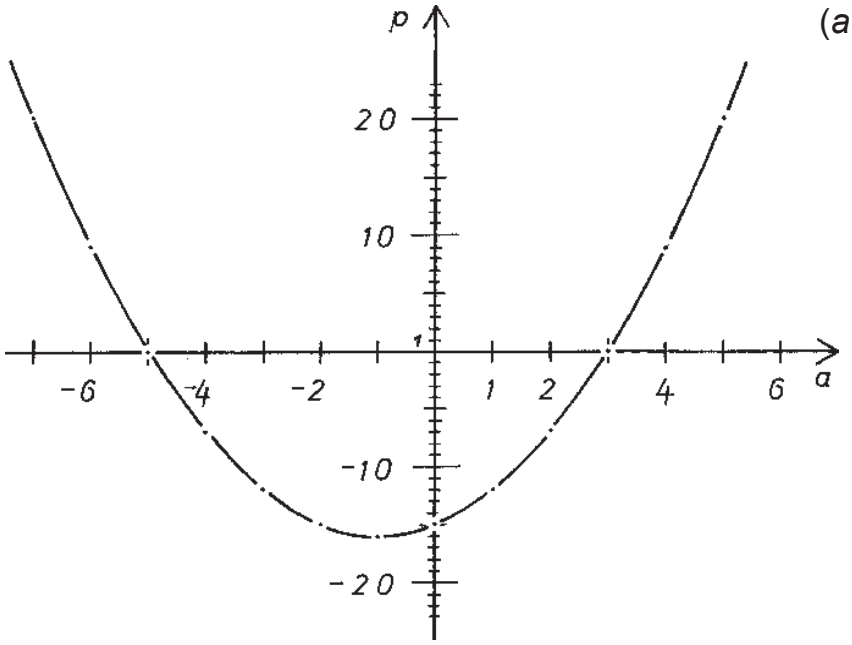
На рисунке 5.2 шаг по оси *p* в 5 раз меньше шага по оси *a.* Соответствующие значения равны 1 и 0,2 см. Опять точки образуют параболу, но уже не такую крутую, как в первом примере.

Если мы построим параболу, соответствующую таблице 5.4, то мы обнаружим, что низшая точка в этой таблице не представлена. Действительно, не может же кривая на участке (3,0) — (4,0) превратиться в горизонтальный отрезок. Между ними должна находиться точка минимума. Подставим в произведение $(a - 3) \cdot (a - 4)$ $a = 3^1/_2$:

$$(3^1/_2 - 3) \cdot (3^1/_2 - 4) = {}^1/_2 \cdot (-{}^1/_2) = -{}^1/_4$$

Точка $(3^1/_2, -^1/_4)$ на самом деле лежит ниже соседних точек и абсолютно вписывается в кривую. Так же можно построить и любые другие промежуточные точки.

Как выглядит кривая справа и слева? Возникает ощущение, что она становится все круче, и круче и круче. Стремит-



$(a + 5) \cdot (a - 3) = p$

a	p
–7	20
–6	9
–5	0
–4	–7
–3	–12
–2	–15
–1	–16
0	–15
1	–12
2	–7
3	0
4	9
5	20

Рис. 5.2

ся ли она к бесконечности? Когда в старших классах ученики знакомятся с понятиями бесконечности в проективной геометрии, они научаются мыслить кривую *в целом*, хотя нарисованным видят всегда только некоторый ее отрезок. По поводу этой кривой можно сказать еще очень многое — все попытки будут тем плодотворнее, чем глубже в учениках, еще со средней школы, запечатлелся образ параболы.

Прежде чем в конце главы мы попытаемся дать содержательное обоснование правила знаков, заметим, что для деления его применимость вытекает из соответствующего правила для умножения, поскольку деление — это обращение умножения:

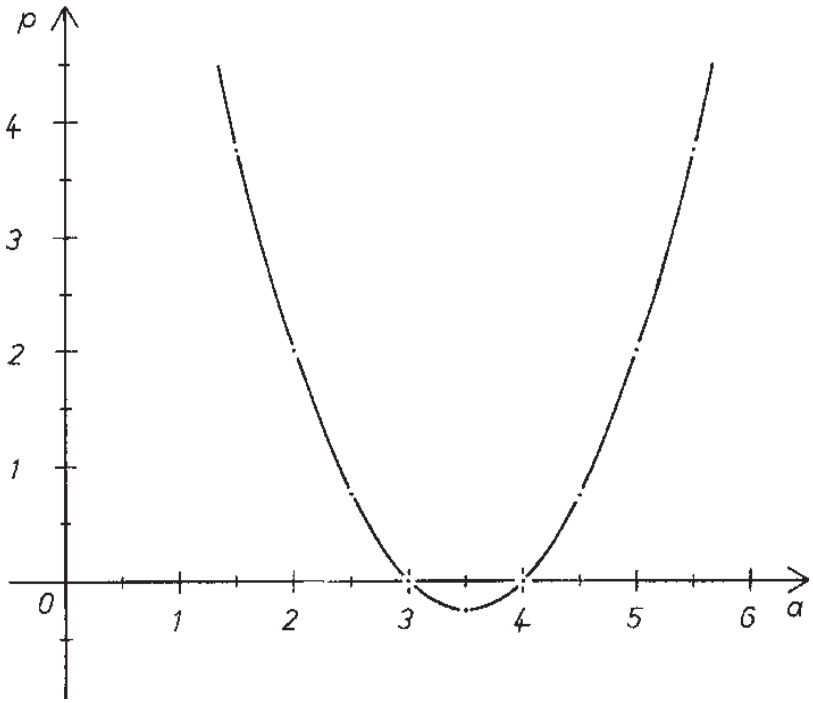
$a : b = c$ равнозначно $b \cdot c = a$

$15 : 3 = 5$, поскольку $3 \cdot 5 = 15$

$(-15) : 3 = -5$, поскольку $3 \cdot (-5) = -15$

$15 : (-3) = -5$, поскольку $(-3) \cdot (-5) = +15$

$(-15) : (-3) = +5$, поскольку $(-3) \cdot (+5) = -15$



$(a-3)\cdot(a-4)=p$

a	p
1,5	3,75
2	2
2,5	0,75
3	0
3,5	–0,25
4	0
4,5	0,75
5	2
5,5	3,75

Рис. 5.3

Правило знаков для деления в символическом виде выглядит так:

+ : + = +
– : + = –
+ : – = –
– : – = +

Резюмируем: если делятся два числа с одинаковым знаком, то результат *положительный*, если делятся два числа с разным знаком — результат *отрицательный*.

Работа с таблицами 5.1– 5.4 усиливает впечатление правильности правила знаков.

Однако этим мы удовлетвориться не можем! Мы хотим *понять*, почему оно правильно. Прежде всего, почему “минус на минус дает плюс”? И вообще, есть ли ответ на этот вопрос?

Долгий опыт преподавания привел автора к рассмотрению, которое позволяет осмыслить данное правило. Сам спо-

соб рассмотрения он, впрочем, опробовал сперва в старших (10-х) классах в теме “Степени”. Работая со степенями, вы сталкиваетесь с *отрицательными показателями* типа 4^{-3}. Что бы это значило? Уже совершенно загадочен пример 4^0. Имеет ли он вообще какой-нибудь смысл? В Приложении к данной главе вы найдете некоторые соображения, которые появились у автора в результате многолетнего преподавания в 10-х классах и показали свою ценность.

Способ рассмотрения, зарекомендовавший себя в теме “Степени”, может быть, однако, перенесен и на произведения. Что такое $3 \cdot 4$? Мы уже много раз обращали ваше внимание на то, что сомножители играют в произведении совершенно разную роль. Эрнст Биндель называл сомножитель “3” *активным* числом, а сомножитель “4” — *пассивным*. Очень важно почувствовать эту разницу. Сомножитель “3” мы могли бы по-другому назвать *управляющим* числом, поскольку оно определяет порядок работы с числом “4”. Мы должны трижды складывать: трижды мы должны будем действовать — действовать складывая. Множитель подталкивает нас к определенной вычислительной деятельности. Теперь запишем $3 \cdot 4$ с помощью сложения $4 + 4 + 4$. В чем дело, здесь только *два* сложения, *две* операции! Нельзя ли представить $3 \cdot 4$ таким образом, чтобы операций было *три*? Для этого надо бы с чем-то сложить и первую “4”! С чем? С нулем!

$$3 \cdot 4 = 0 + 4 + 4 + 4$$

Теперь на самом деле *три* сложения! Если множимое отрицательно — все то же самое.

$$(+3) \cdot (-4) = 0 + (-4) + (-4) + (-4) = -12$$

Если же отрицателен множитель, например $(-3) \cdot (+4)$, тогда приходится искать новую интерпретацию. Множитель (-3) остается *управляющим* числом; он указывает, как нужно обращаться с числом $+4$. Мы должны проделать *три* вычис-

ления! Какие? Ясно, что не три сложения — тогда бы множитель был положительным. Мы можем интерпретировать минус при множителе как указание трижды выполнить *противоположную* операцию, тройное *вычитание* множимого.

$$(-3) \cdot (+4) = 0 - (+4) - (+4) - (+4) = -12$$

Уже первое +4 нужно от чего-нибудь отнять. От нуля. После такой интепретации результат становится понятным. Управляющее число (множитель) имеет значение (3) и качество (положительное или отрицательное). *Качество* (знак при множителе) предписывает, *какую* операцию (сложение или вычитание) следует (несколько раз) выполнять над множимым. *Значение* множителя предписывает, *сколько* таких операций нужно выполнять.

Воспользуемся этой интерпретацией для вычисления произведения двух *отрицательных* чисел:

$$(-3) \cdot (-4)$$

Это не что иное, как тройное вычитание –4 из нуля:

$$(-3) \cdot (-4) = 0 - (-4) - (-4) - (-4)$$

Итак: $(-3) \cdot (-4) = +12$

Поясним значение такого рода размышлений. Мы не стремимся “доказывать” в обычном смысле этого слова, мы стремимся перекинуть мост между нашей мыслящей душой и правилом знаков, данным нам сначала из опыта (вычислений). Опыт должен подсказать нам формулировки. Мы вынуждены принять их сначала просто как данность опыта. Но если мы на этом остановимся, мы в конце концов почувствуем некоторую навязанность этих правил. Если же мы дополним правила вышеприведенными размышлениями, то у нас появится некоторое к ним отношение, мы сможем их внутренне принять. И не погрешим против нашего мышления и нашей совести.

Приложение: Эрнст Биндель и Луис Лохер-Эрнст обратили внимание на то, что все множество арифметических операций можно рассматривать поступенно, в том же роде, как рассматривают развивающийся организм. Самая нижняя ступень — это сложение двух или нескольких чисел. Если складывается повторно одно и то же число, то сложение превращается в умножение. Если, в свою очередь, в умножении участвует один и тот же сомножитель, то умножение восходит на ступень возведения в степень. В младших и средних классах ученики знакомятся преимущественно со степенью 2 и 3 (площадь квадрата и объем куба).

В 10-м классе они рассматривают степени с произвольным показателем — не только со сколь угодно большим положительным, но и с отрицательным и нулевым. Можно подвести учеников к новому понятию степени с помощью следующей таблицы:

$4^3 = 64$
$4^2 = 16$
$4^1 = 4$
$4^0 = 1$
$4^{-1} = {}^1/_4$
$4^{-2} = {}^1/_{16}$
$4^{-3} = {}^1/_{64}$
...

В левом столбце мы шаг за шагом уменьшаем показатель на 1; в правом — делим на 4. Таблица приводит нас к странным степеням с отрицательным (например, $4^{-3} = {}^1/_{64}$) или нулевым ($4^0 = 1$) показателем. Но даже степень с показателем “1” достаточно ($4^1 = 4$) загадочна; есть ведь разница между 4^1 и просто 4.

На вопрос “Как вычислить степень с натуральным показателем (например, 4^3)?” часто дается следующий ответ: “Основание должно быть столько раз умножено само на себя, какова степень”. Итак,

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$$

Это правильно, если степень больше и равна 2. Для первоначального понимания степени этого вполне достаточно. Но можно ли распространить подобный ответ на степени с показателями меньше чем 2? Действительно ли 4 умножается 1 раз само на себя, когда нужно вычислить $4^1 = 4$? Нет, просто 4 это просто 4, никаким сомножителем оно не является. Хорошо, а можем ли мы применить данный рецепт для вычисления 4^0? Можно ли 4 умножить 0 раз само на себя? Нет, рецепт нереализуем: в этом случае он предписывает по сути не вычислять вообще; но тогда не получается и результата, в том числе и нулевого. А уж со степенями типа 4^{-1}, 4^{-2}, 4^{-3} и вовсе не понятно, что делать. Как это 4 умножить на себя минус один или минус два раза? Мы видим, что обычные понятия не приводят нас ни к чему. Однако и просто отмахнуться от степеней с отрицательным показателем мы не можем. Тогда математическая система потеряет свою полноту.

Выход состоит в том, чтобы реализовать понятие степени с положительным показателем *полностью*. В выражении 4^3 3 — это управляющее число. Будем действовать так, как оно нам предписывает, а именно подвергнем число 4 *трем умножениям*. Но тогда уже первая 4 должна стать *сомножителем*; это возможно, если мы оттолкнемся от числа “1”.

$$4^3 = 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$$

Теперь мы на самом деле умножаем трижды. Аналогично:

$$4^2 = 1 \cdot 4 \cdot 4$$

С 4^1 тоже все нормально:

$$4^1 = 1 \cdot 4$$

Как быть в этом случае с 4^{-3}? Степень управляет нашими действиями. Но какими? Это уже не умножения — тогда бы степень была положительной. Представим себе, что нам

предписывается выполнить три *противоположные* операции, — три *деления*, — опять-таки отталкиваясь от 1 — тогда мы придем к уже знакомому нам результату:

$$4^{-3} = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{64}$$

Переход от положительного к отрицательному показателю приводит не к отрицательному, а к обратному результату: $4^3 = 64$, $4^{-3} = {}^1/_{64}$.

Аналогично:

$$4^{-2} = \frac{1}{4 \cdot 4} = \frac{1}{16}$$

Таким образом, мы приходим к убеждению, что понятие степени глубоко связано с числом “1”. К этому же числу приводит нас и 4^0. Показатель “0” не управляет ни сомножителем, ни делителем; 1 остается 1, и поэтому

$4^0 = 1$.

Число “1” — необходимый спутник степеней. В таблице, начиная со строки $4^0 = 1$, оно проступает в явном виде. В степени 4^1, 4^2, 4^3... нам нет нужды приписывать 1; но в идеальном смысле она присутствует и в них.

Много раз я становился свидетелем того, насколько быстро ученики 10-го класса вживаются в такой способ рассмотрения и насколько естественными находят вышеприведенные рассуждения. Это помогает им зафиксировать понятие степени.

Хотелось бы обратить внимание читателей на то обстоятельство, что то же самое рассмотрение можно проделать и для более простого материала — я имею в виду умножение.

6. Типы заданий при переходе от арифметики к алгебре

После 5 глав, посвященных рассмотрению фундаментальных вопросов, связанных с алгебраическими и арифметическими выражениями, следуют две главы, посвященные выполнению конкретных заданий.

Эта глава представляет целую серию заданий, подходящих для периода перехода от арифметики к алгебре. Они предназначены прежде всего для тренировочных уроков и построены таким образом, чтобы каждое условие сопровождалось несколькими числовыми вариантами. Тогда первая часть задания может быть разобрана и решена в классе, а вторая часть (вариации того же условия) оставлена для самостоятельной работы и домашних заданий.

Представлены задания на различнейшие темы: основные арифметические операции, обыкновенные и десятичные дроби, работа с важнейшими степенями. Многообразие действует на учеников тонизирующе; однако следует всегда помнить о логике материала. Как можно больше следует считать в уме; работая с большими числами, можно переходить к письменным вычислениям. Многие задания даны таким образом, что допускают несколько решений. Ученики не должны в этом случае просто автоматически вычислять, они должны искать простейшее решение. Например, в примерах с дробями можно с самого начала сократить и благодаря этому значительно упростить счет. В некоторых группах превалируют чисто вычислительные примеры. Они сформулированы так, что на первый план выступает вопрос о “как” — о способе вычисления. Если ученик освоил это “как” на материале числовых выражений, то ему легче будет работать с алгебраическими. В этом смысле числовые примеры являются подготовкой к алгебре. Большинство заданий не

принадлежит к одной-единственной группе, но возникает затем в ином контексте. Это способствует выработке гибкости.

1-я группа

1. $2{,}3a + 4{,}5b + 7{,}2c + 4{,}6a + 2{,}7b + 8{,}1 + 5{,}6b =$
2. $7{,}8a + 11{,}6b - 5{,}9c - 7{,}1b + 11{,}9c + 3{,}0a =$
3. $21a + 18b + 23c - (15a + 3b + 7c) =$
4. $35a + 31b - 7c - (19a - 16b - 11c) =$
5. $105 - 37 + 26 - 18 + 31 - 40 =$
6. $117 - 95 + 181 - 121 =$
7. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} =$
8. $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12} =$
9. $\frac{4}{5} - \frac{1}{4} - \frac{3}{20} =$
10. $\frac{4}{5} - \frac{1}{4} - \frac{3}{20} =$
11. $2{,}8a + 9{,}3b + 4{,}1c + 1{,}7a + 5{,}7b + 8{,}1c + 3{,}8a =$
12. $17{,}3a + 12{,}3b - 15{,}1c - 8{,}3a - 6{,}5b + 20{,}9c =$
13. $66a + 83b + 27c - (35a + 65b + 19c) =$
14. $79a + 34b - 21c - (32a - 16b - 81c) =$
15. $150 - 88 + 37 - 64 + 19 - 26 =$
16. $218 - 195 + 343 - 211 =$
17. $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} =$
18. $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{7}{12} =$
19. $\frac{7}{8} - \frac{5}{24} - \frac{1}{12} =$
20. $\frac{5}{6} - \frac{7}{30} + \frac{4}{5} =$

2-я группа

1. $(a + 5)\cdot(a + 7) =$
2. $(a + 11)\cdot(a + 15) =$
3. $(2a + 6)\cdot(3a + 4) =$
4. $(5a + 7)\cdot(8a + 9) =$
5. $a^2 + 7a + 6 + (a + 8)\cdot(a + 11) =$
6. $3a^2 + 8a + 4 + (2a + 3)\cdot(5a + 10) =$
7. $\frac{21\cdot18\cdot13}{35\cdot27\cdot26} =$
8. $\frac{16\cdot30\cdot22}{24\cdot36\cdot33} =$
9. $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot0{,}5 =$
10. $\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{8}\right)\cdot0{,}2 =$
11. $(a + 9)\cdot(a + 10) =$
12. $(a + 17)\cdot(a + 12) =$
13. $(3a + 4)\cdot(5a + 6) =$
14. $(8a + 2)\cdot(3a + 12) =$
15. $a^2 + 10a + 7 + (a + 4)\cdot(a + 13) =$
16. $7a^2 + 11a + 16 + (3a + 5)\cdot(4a + 9) =$
17. $\frac{20\cdot21\cdot14}{25\cdot27\cdot35} =$
18. $\frac{32\cdot63\cdot55}{40\cdot49\cdot45} =$
19. $\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot0{,}6 =$
20. $\left(\frac{5}{4}-\frac{7}{8}\right)\cdot0{,}4 =$

3-я группа

1. $(2{,}3 + 7{,}9) \cdot 5 =$
2. $(3{,}4 + 1{,}2) \cdot (4{,}8 + 9{,}1) =$
3. $(4{,}8 + 5{,}6 – 2{,}7) \cdot (1{,}9 – 0{,}6) =$

4. $3 + 3^2 - 3^3 + 3^4 =$

5. $6^2 + 9^2 - \frac{169}{13} =$

6. $\frac{42 \cdot 15 \cdot 26}{28 \cdot 45 \cdot 39} =$

7. $\frac{1}{2} + 0{,}6 - \frac{1}{4} + 1{,}25 =$

8. $\left(\frac{1}{2} + 0{,}2\right) \cdot 0{,}9 =$

9. $a^2 + 3a + 7 + (a + 6) \cdot (a + 9) =$

10. $(2a + 5) \cdot (3a - 2) =$

11. $(3{,}4 + 15{,}3) \cdot 7 =$

12. $(5{,}1 + 3{,}4) \cdot (4{,}1 + 2{,}6) =$

13. $(9{,}7 + 4{,}2 - 3{,}1) \cdot (2{,}8 - 1{,}3) =$

14. $4 + 4^2 + 4^3 =$

15. $5^2 + 8^2 - 7^2 + \frac{12^2}{6} =$

16. $\frac{24 \cdot 36 \cdot 81}{18 \cdot 30 \cdot 27} =$

17. $\frac{3}{2} + 0{,}7 - \frac{3}{4} + 1{,}75 =$

18. $\left(\frac{5}{2} + 0{,}3\right) \cdot 1{,}2 =$

19. $5a^2 + 8a + 21 + (2a + 3) \cdot (a + 4) =$

20. $17a^2 + 81a + 100 + (5a + 8) \cdot (2a - 6) =$

4-я группа

1. $(2^2 + 7) \cdot 3^2 =$

2. $(2^2 + 7^2) \cdot 3 =$

3. $(2 + 7)^2 \cdot 3 =$

4. $(3 \cdot 4 + 5) \cdot 7 =$

5. $(3 + 4 \cdot 5) \cdot 7 =$

6. $(3 + 4 + 5) \cdot 7 =$

7. Вычисли: $\frac{a+1}{2a}$ для $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$

8. Вычисли: $\frac{a^2+1}{a+2}$ для $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$

9. $(5a + 3b - 2a + 6b)\cdot(8a + 7b + 3b - 3b) =$

10. $(2a^2 + 7a + 4a^2 - 3a)\cdot(5a + 3 - 2a + 4) =$

11. $(3 + 5^2) \cdot 4 =$ 12. $(3^2 + 5^2) \cdot 4 =$

13. $(3 + 5)^2 \cdot 4 =$ 14. $(5 \cdot 6 + 3) \cdot 4 =$

15. $(5 + 6 \cdot 3) \cdot 4 =$ 16. $(5 + 6 + 3) \cdot 4 =$

17. Вычисли: $\frac{a+3}{2a}$ для $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$.

18. Вычисли: $\frac{a^2+2a}{a+2}$ для $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$.

19. $(8a + 9b - 3a - 5b)\cdot(12a + 14b - 9a - 6b) =$

20. $(7a^2 + 14a + 2a^2 - 9a)\cdot(18a + 15 - 12a - 8) =$

5-я группа

1. $(2^3 + 5) \cdot 3^2 =$ 2. $(2 + 5^2) \cdot 3^3 =$

3. $(2 + 5)^3 \cdot 3 =$ 4. $(3 \cdot 8 + 5^2) \cdot 4 =$

5. $(3^2 + 8 \cdot 5) \cdot 4^2 =$ 6. $(3^2 + 8^2 + 5^2) \cdot 4 =$

Вычисли значение дробей для $a = 1, 2, 3, 4, 5, 10$.

7. $\frac{a+2}{3a}$ 8. $\frac{a^2+2}{2a+1}$ 9. $\frac{(2a)^2}{a^2+2}$ 10. $\frac{1+(2a)^2}{3a+2}$

11. $(4 + 7^2) \cdot 8 =$ 12. $(4^2 + 7) \cdot 8^2 =$

13. $(4 + 7)^2 \cdot 8 =$ 14. $(5 \cdot 9 + 11^2) \cdot 6 =$

15. $(5^2 + 9 \cdot 11) \cdot 6 =$ 16. $(5^2 + 9^2 + 11^2) \cdot 6 =$

Вычисли значение четырех указанных дробей для *a* = 1, 2, 3, 4, 5, 10.

17. $\frac{2a+4}{3a}$ 18. $\frac{a^2+3a}{2a-1}$ 19. $\frac{(3a)^2}{a+3}$ 20. $\frac{(a+2)^2}{2a+a^2}$

6-я группа

1. $\frac{5^2+5}{6^2-6} =$ 2. $\frac{13^2-3^2}{17^2-7^2} =$ 3. $\frac{12^2+3^2-13}{19^2-11} =$ 4. $\frac{2^3+3^3}{5^3} =$

5. Сократи: $\frac{24}{36}$ $\frac{70}{105}$ $\frac{51}{68}$ $\frac{44}{154}$ $\frac{26}{39}$

6. $\frac{25 \cdot 81}{36 \cdot 40} =$ 7. $\frac{44 \cdot 13}{55 \cdot 26} =$ 8. $\frac{104 \cdot 34}{17 \cdot 65} =$ 9. $\frac{60 \cdot 99}{33 \cdot 45} =$

10. $\frac{2}{5}$ от 370 = 11. $\frac{4}{5}$ от 1230 = 12. $\frac{1}{4}$ от 932 =

13. $\frac{(7{,}8+4{,}6) \cdot 3{,}6}{9} =$ 14. $\frac{(5{,}3-2{,}4) \cdot 6{,}3}{3} =$

15. $\frac{11^2+7^2}{6^2+8^2} =$ 16. $\frac{12^2+16^2}{15^2+5^2} =$ 17. $\frac{2^2+3^2+5^2}{9^2-8^2} =$

18. $\frac{10^3-8^3}{6^3} =$

19. Сократи: $\frac{21}{98}$ $\frac{92}{69}$ $\frac{33}{121}$ $\frac{77}{91}$ $\frac{84}{63}$

20. $\frac{24\cdot 45}{27\cdot 32}$ 21. $\frac{42\cdot 63}{45\cdot 28}$ 22. $\frac{27\cdot 39}{26\cdot 54}$ 23. $\frac{81\cdot 28}{56\cdot 54}$

24. $\frac{3}{5}$ от 810 = 25. $\frac{3}{4}$ от 780 = 26. $\frac{5}{8}$ от 6120 =

27. $\frac{(2{,}7+5{,}1)\cdot 4{,}9}{7}=$ 28. $\frac{(2{,}8+5{,}6)\cdot 5{,}2}{4}=$

7-я группа

1. $\frac{(1{,}8+4{,}5)\cdot 7{,}2}{3}=$ 2. $\frac{(5{,}6-1{,}4)\cdot 3{,}6}{6}=$

3. $4\cdot\frac{1}{3}+7\cdot\frac{2}{3}+5\cdot\frac{4}{3}=$ 4. $2\cdot\frac{3}{5}+7\cdot\frac{4}{5}-3\cdot\frac{2}{5}=$

5. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{1}{4}=$ 6. $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{7}{6}=$

7. $4\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{5}+9\cdot\frac{3}{10}=$ 8. $3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{2}{3}-3\cdot\frac{3}{4}=$

9. $5\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)=$ 10. $7\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{7}-\frac{3}{14}\right)=$

11. $\frac{2}{3}\cdot 702=$ 12. $\frac{3}{5}\cdot 615=$

13. $\frac{4}{9}\cdot 171=$ 14. $\frac{2}{7}\cdot 651=$

15. $\frac{(8{,}1+2{,}7)\cdot 4{,}5}{9}=$

16. $\frac{(7{,}2-1{,}8)\cdot 6{,}3}{9}=$

17. $7\cdot\frac{1}{2}+9\cdot\frac{3}{2}-4\cdot\frac{5}{2}=$

18. $4\cdot\frac{3}{7}+11\cdot\frac{5}{7}-6\cdot\frac{2}{7}=$

19. $\frac{3}{8}+\frac{7}{12}+\frac{5}{6}=$

20. $\frac{3}{7}+\frac{8}{35}-\frac{2}{5}=$

21. $5\cdot\frac{7}{8}+2\cdot\frac{11}{12}+4\cdot\frac{2}{3}=$

22. $9\cdot\frac{2}{5}+6\cdot\frac{2}{3}-3\cdot\frac{3}{4}=$

23. $7\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{7}+\frac{11}{14}\right)=$

24. $5\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{5}-\frac{3}{10}\right)=$

25. $\frac{3}{4}\cdot 864=$

26. $\frac{5}{6}\cdot 246=$

27. $\frac{2}{9}\cdot 945=$

28. $\frac{3}{7}\cdot 504=$

8-я группа

1. $5\cdot\frac{2}{15}+4\cdot\frac{7}{12}+6\cdot\frac{5}{18}=$

2. $4\cdot\frac{1}{28}+5\cdot\frac{2}{35}-3\cdot\frac{1}{21}=$

3. $1\frac{3}{7}+4\frac{2}{7}+5\frac{6}{7}=$

4. $7\frac{2}{9}+10\frac{4}{9}-6\frac{5}{9}=$

5. $\frac{a}{3}+\frac{a}{4}=$

6. $\frac{2a}{5}+\frac{5a}{6}+\frac{7a}{10}=$

7. $5\cdot\frac{a}{2}+4\cdot\frac{a}{5}+\frac{7a}{4}=$

8. $\frac{4a}{15}+3\cdot\frac{a}{45}=$

9. $\frac{2a+3b}{3}+\frac{4a+5b}{2}=$

10. $\frac{7a+5b}{5}+\frac{9a-2b}{4}=$

11. $7\cdot\frac{3}{28}+5\cdot\frac{9}{20}+3\cdot\frac{7}{12}=$

12. $3\cdot\frac{2}{27}+5\cdot\frac{4}{45}-7\cdot\frac{2}{63}=$

13. $11\frac{1}{5}+7\frac{2}{5}-2\frac{3}{5}=$

14. $15\frac{10}{11}+4\frac{3}{11}-7\frac{8}{11}=$

15. $\frac{a}{5}+\frac{a}{6}=$

16. $\frac{2a}{7}+\frac{5a}{14}+\frac{3a}{28}=$

17. $2\cdot\frac{a}{3}+3\cdot\frac{a}{5}+5\cdot\frac{a}{4}=$

18. $\frac{6a}{17}+3\cdot\frac{a}{51}=$

19. $\frac{4a+7b}{3}+\frac{5a-2b}{4}=$

20. $\frac{3a+2b}{8}+\frac{7a-2b}{10}=$

Повторение
1-я группа

1. $(3^2 + 8) \cdot 9 =$

2. $(3 + 8)^2 \cdot 9 =$

3. $(3 + 8) \cdot 9^2$

4. $(5{,}3 + 2{,}4)\cdot(7{,}9 – 4{,}6) =$

5. $\frac{33\cdot 21\cdot 15}{44\cdot 28\cdot 18}=$

6. $(7a + 8b + 5a)\cdot(18a – 3b – 11a) =$

7. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=$

8. $5\cdot\frac{2}{3}+4\cdot\frac{4}{3}=$

9. $3\cdot\frac{2}{7}+5\cdot\frac{3}{4}=$

10. $\frac{a}{5}+\frac{a}{6}=$

11. $\frac{2a}{3}+\frac{3a}{4}=$

12. $5\cdot\frac{a}{3}+7\cdot\frac{a}{2}=$

13. $0{,}75+\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=$

14. $\left(0{,}5+\frac{1}{4}\right)\cdot 7=$ 15. $\left(\frac{3}{4}+0{,}4\right)\cdot\frac{3}{2}=$ 16. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot 0{,}2=$

17. $\frac{4a+5b}{5}+\frac{2a+3b}{3}=$ 18. $\frac{5a-4b}{7}+\frac{2a-3b}{2}=$

19. $\frac{(4{,}5+8{,}1)\cdot 15{,}3}{9}=$ 20. $\frac{(3{,}7+6{,}2)\cdot(5{,}4-2{,}1)}{3}=$

2-я группа

1. $(4^2 + 7) \cdot 8 =$ 2. $(4 + 7)^2 \cdot 8 =$ 3. $(4 + 7) \cdot 8^2$

4. $(5{,}2 + 3{,}5)\cdot(8{,}2 – 5{,}5) =$ 5. $\frac{66\cdot 42\cdot 24}{55\cdot 35\cdot 27}=$

6. $(11a + 9b + 2a)\cdot(17a – 5b – 12b) =$ 7. $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=$

8. $6\cdot\frac{2}{5}+7\cdot\frac{3}{5}=$ 9. $4\cdot\frac{5}{3}+9\cdot\frac{7}{2}=$ 10. $\frac{a}{3}+\frac{a}{4}=$

11. $\frac{2a}{5}+\frac{5a}{6}=$ 12. $4\cdot\frac{a}{3}+\frac{2a}{7}=$ 13. $1{,}25+\frac{3}{5}-\frac{3}{4}=$

14. $\left(0{,}5+\frac{3}{4}\right)\cdot 9=$ 15. $\left(\frac{1}{2}+0{,}4\right)\cdot\frac{5}{2}=$ 16. $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot 0{,}3=$

17. $\frac{3a+7b}{5}+\frac{4a+2b}{3}=$

18. $\frac{6a-3b}{7}+\frac{4a-5b}{2}=$

19. $\frac{(3{,}6+6{,}3)\cdot 17{,}2}{9}=$

20. $\frac{(2{,}5+1{,}7)\cdot(6{,}3-1{,}4)}{7}=$

7. Типы заданий на алгебраические преобразования с положительными и отрицательными числами

Если в предыдущей главе царило многообразие заданий, то теперь мы сконцентрируемся на определенном их типе. После рассмотрений, проведенных в главах 3—5, когда мы прояснили проблемы, связанные с положительными и отрицательными числами, все подготовлено для решения множества задач. Чтобы облегчить ориентировку, глава разбита на небольшие разделы. В каждом разделе сначала разобрано некоторое количество задач, а затем даны примеры на закрепление.

Основные темы — раскрытие скобок и разложение на множители. Обращено внимание на то, чтобы были представлены и естественно чередовались противоположные типы арифметических операций; такая смена особо укрепляет гибкость и подвижность мышления. В группах собраны такие задания, которые подходят и для главного урока. Однако не подразумевается, что все ученики должны решить все примеры. Конечно, сложность большинства заданий колеблется в пределах от легкого до среднего уровня; этим материалом должны овладеть все без исключения. Однако есть и такие ученики, которые быстро справляются с основным материалом и хотят двигаться дальше. Для них приведены примеры повышенной сложности. Каждый должен иметь возможность продвинуться настолько далеко, насколько может. Этот принцип особенно касается раздела, посвященного сокращению алгебраических дробей и алгеб-

раическому делению. При сокращении дробей у учеников вырабатывается аналитический тип мышления: какие общие сомножители входят и в числитель, и в знаменатель? Нахождение этих общих сомножителей требует особой изворотливости; потому-то этот раздел и требует особенно большого количества упражнений. Некоторые из них могут быть решены только в 9-м классе. При делении суммы на сумму все математические операции взаимодействуют друг с другом. Здесь требуется навык разложения и “вычислительного планирования”.

Умножение скобки на единственный множитель и вынесение одного множителя из суммы и разности

В обоих типах задач следует упражнять попеременно. Один апеллирует больше к аналитической, другой — к синтетической стороне мышления.

1. Умножение скобки на единственный сомножитель.

$7 \cdot (3x - 2 + 5y) = 21x - 14 + 35y$

$11x \cdot (8x - 9y) = 88x^2 - 99xy$

$5ab \cdot (4a + 3b - 1) = 20a^2b + 15ab^2 - 5ab$

$(-4) \cdot (3a - 7b - 1) = -12a + 28b + 4$

2. Вынесение за скобки одного общего множителя.

$10x - 15 + 25y = 5 \cdot (2x - 3 + 5y)$

$26x^2 - 39xy = 13x \cdot (2x - 3y)$

$21a^2b + 15ab^2 - 3ab = 3ab \cdot (7a + 5b - 1)$

Вынесение за скобки отрицательного общего множителя.

$-21a - 35b + 28 = (-7) \cdot (3a + 5b - 4)$

$-22x^2 + 10xy = (-2x) \cdot (11x - 5y)$

$10a^2b - 20ab^2 - 15ab = (-5ab) \cdot (-2a + 4b + 3)$

Примеры на степени.

$3a^3 \cdot (5a + 2a^2 + 4a^3) = 15a^4 + 6a^5 + 12a^6$

$4x^2 + 8x^3 + 20x^5 = 4x^2 \cdot (1 + 2x + 5x^3)$

Правило *умножения степеней с общим основанием* можно выразить формулой:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Она очевидным образом следует из понятия степени. В качестве показателя может выступать и 1: $a^1 = a$ (смотри Приложение к главе 5).

Примеры: $a^2 \cdot a^3 = a^5$ $\quad a^4 \cdot a = a^4 \cdot a^1 = a^5$

$a^6 \cdot a^9 \cdot a^1 = a^{16}$ $\quad a^8 = a^1 \cdot a^7$ $\quad a^8 = a^2 \cdot a^6$

$a^8 = a^3 \cdot a^5$ $\quad a^8 = a^4 \cdot a^4$

Задачи на вынесение за скобки (положительного и отрицательного множителя) и раскрытие скобок

1-я группа

Раскрыть скобки:

1. $6 \cdot (2x - 1 + 5y) =$
2. $13 \cdot (3a - 7b + 1) =$
3. $15 \cdot (1 + 2m - 3n) =$
7. $5x \cdot (2y + 7x) =$
8. $8a \cdot (3a - 4b) =$
9. $7z \cdot (11z + 3x) =$
13. $5a \cdot (4 + 7a - 9a^2) =$
14. $7x \cdot (5 + 3x^2 - 11x^3) =$
15. $9m^2 \cdot (6 + 7m - 18m^2) =$
19. $3ab \cdot (5a + 4b + 7) =$

Вынеси за скобки:

4. $22x - 11 + 33y =$
5. $36a - 27b + 9 =$
6. $7 + 42m - 35n =$
10. $21xy + 35x^2 =$
11. $18a^2 - 45ab =$
12. $44z^2 + 55xz =$
16. $45a - 18a^2 + 27a^3 =$
17. $20x - 30x^2 + 50x^4 =$
18. $17m + 34m^2 - 51m^5 =$
22. $14a^2b + 21ab^2 + 35ab =$

20. $5xy \cdot (2x + 8y + 5) =$
21. $6mn \cdot (3m - 7n - 11) =$

23. $6x^2y - 10xy^2 + 14xy =$
24. $55m^2n + 33mn^2 - 88mn =$

Раскрой скобки:

25. $(-5) \cdot (3x - 2 + 6y) =$
26. $(-12) \cdot (5a + 2b - 1) =$
27. $(-13) \cdot (1 - 4m + 5n) =$

Вынеси за скобки:

28. $21x - 28 - 42y =$
29. $-15a - 25b + 30 =$
30. $-9 + 27m - 36n =$

31. $(-4x) \cdot (3x - 5y) =$
32. $(-7a) \cdot (-4a + 3b) =$
33. $(-3z) \cdot (-5z - 6x) =$

34. $-24xy + 32x^2 =$
35. $-26a^2 + 39ab =$
36. $-12z^2 - 48z =$

37. $(-6a) \cdot (2 - 8a - 4a^2) =$
38. $(-15x) \cdot (-3x^3 - 4x^2 + 6) =$
39. $(-11m^2) \cdot (-7 + 3m - 4m^2) =$

40. $16a - 24a^2 - 40a^3 =$
41. $-90x^2 - 50x + 30x^3 =$
42. $-19m^5 + 38m^3 - 57m =$

Раскрытие скобок, приводящее к трехчлену и обратное преобразование трехчлена в произведение двух скобок

После того как в главе 5 мы рассмотрели правило знаков, мы можем перейти к работе с трехчленами вида

$a^2 - 8a + 15$
$a^2 + 3a - 10$
$a^2 - 3a - 18$ и разложить их на произведение двух скобок.

В качестве **1-го случая** рассмотрим пример с одними плюсами:

$$a^2 + 7a + 12 = (a + 3)(a + 4).$$

Оба числа в скобках должны при перемножении дать 12, а при сложении 7.

2-й случай: как выглядят примеры, в которых числа в *обеих*

скобках *вычитаются*?

$(a - 5)(a - 6) = a^2 - 6a - 5a + 30 = a^2 - 11a + 30$
$(a - 4)(a - 7) = a^2 - 7a - 4a + 28 = a^2 - 11a + 28$
$(a - 3)(a - 1) = a^2 - a - 3a + 3 = a^2 - 4a + 3$

Общее во всех трех примерах: множитель при a отрицателен, свободный член положителен. На алгебраическом языке:

$$(a - p)(a - q) = a^2 - pa - qa + pq = a^2 - (p + q)a + pq$$

Обратная задача:

$$a^2 - 8a + 15 = (a - ?)(a - ?)$$

Надо найти два числа, сумма которых дает –8, а произведение +15: это –3 и –5.

$a^2 - 8a + 15 = (a - 3)(a - 5)$
$a^2 - 9a + 14 = (a - ?)(a - ?)$

Произведение каких двух чисел равно +14, а сумма –9? Это числа –2 и –7.

$a^2 - 9a + 14 = (a - 2)(a - 7)$
$a^2 - 11a + 24 = (a - ?)(a - ?)$
$a^2 - 11a + 24 = (a - 3)(a - 8)$

3-й и 4-й случай: одна скобка — сумма, другая — разность.

3-й случай:

$(a + 5)(a - 3) = a^2 - 3a + 5a - 15 = a^2 + 2a - 15$
$(a + 9)(a - 5) = a^2 - 5a + 9a - 45 = a^2 + 4a - 45$
$(a + 11)(a - 1) = a^2 - 1a + 11a - 11 = a^2 + 10a - 11$
$(a - 2)(a + 9) = a^2 + 9a - 2a - 18 = a^2 + 7a - 18$
$(a - 10)(a + 11) = a^2 + 11a - 10a - 110 = a^2 + a - 110$

4-й случай:

$(a + 3)(a - 8) = a^2 - 8a + 3a - 24 = a^2 - 5a - 24$
$(a + 7)(a - 10) = a^2 - 10a + 7a - 70 = a^2 - 3a - 70$

$(a + 6)(a – 7) = a^2 – 7a + 6a – 42 = a^2 – a – 42$
$(a – 8)(a + 1) = a^2 + a – 8a – 8 = a^2 – 7a – 8$
$(a – 9)(a + 8) = a^2 + 8a – 9a – 72 = a^2 – a – 72$

В третьем примере *складывается большее*, а *вычитается меньшее* число: коэффициент при *а положительный*.

В четвертом примере *большее* число *вычитается*, а *меньшее складывается*: коэффициент при *а отрицательный*.

В обоих примерах свободный член *отрицательный*.

Обратные задачи:
3-й случай:

$a^2 + 4a – 12 = (a + 6)(a – 2)$
$a^2 + 5a – 24 = (a + 8)(a – 3)$
$a^2 + 4a – 5 = (a – 1)(a + 5)$
$a^2 + a – 42 = (a – 6)(a + 7)$

4-й случай:
$a^2 – 5a – 14 = (a – 7)(a + 2)4$
$a^2 – 6a – 27 = (a – 9)(a + 3)$
$a^2 – 5a – 6 = (a + 1)(a – 6)$
$a^2 – a – 20 = (a + 4)(a – 5)$

Все 4 случая:
1-й случай: $a^2 + ma + n = (a + p)(a + q)$ *n положительно*: в скобках
2-й случай: $a^2 – ma + n = (a – p)(a – q)$ *одинаковые* знаки
3-й случай: $a^2 + ma – n = (a + g)(a – k)$ *n отрицательно*: в скобках
4-й случай: $a^2 – ma – n = (a + k)(a – g)$ *различные* знаки
g — здесь большее число.
k — здесь меньшее число.

Правила: Если *n* положительно, то в обеих скобках одинаковые знаки; знак “+”, если *m* положительно, знак “–”, если *m* отрицательно.

Если n отрицательно, то в обеих скобках разные знаки; если m положительно, знак “+” оказывается при большем числе, если m отрицательно, знак “–” оказывается при меньшем числе.

Специальные случаи: три биноминальных формулы

Если в скобках стоят два одинаковых числа, то два первых случая превращаются в две первые биноминальные формулы:

$$(p = q = b)$$

1-я биноминальная формула:

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2-я биноминальная формула:

$$(a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Из 3-го и 4-го случаев возникает
3-я биноминальная формула, если $g = k = b$**:**

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Не только первая, но и вторая и третья биноминальная формула часто используются при вычислениях:

$25^2 = (30 - 5)^2 = 900 - 300 + 25 = 625$
$26^2 = (30 - 4)^2 = 900 - 240 + 16 = 676$
$27^2 = (30 - 3)^2 = 900 - 180 + 9 = 729$
$28^2 = (30 - 2)^2 = 900 - 120 + 4 = 784$
$29^2 = (30 - 1)^2 = 900 - 60 + 1 = 841$

То же самое, только вычисленное с помощью первой фор-

мулы:

$25^2 = (20 + 5)^2 = 400 + 200 + 25 = 6254$
$26^2 = (20 + 6)^2 = 400 + 240 + 36 = 676$
$27^2 = (20 + 7)^2 = 400 + 280 + 49 = 729$
$28^2 = (20 + 8)^2 = 400 + 320 + 64 = 784$
$29^2 = (20 + 9)^2 = 400 + 360 + 81 = 841$

Если нужно вычислить квадрат двузначного числа, единицы которого больше чем 5, то уместно использовать вторую биноминальную формулу:

$36^2 = (40 – 4)^2 = 1600 – 320 + 16 = 1296$
$47^2 = (50 – 3)^2 = 2500 – 300 + 9 = 2209$
$58^2 = (60 – 2)^2 = 3600 – 240 + 4 = 3364$
$69^2 = (70 – 1)^2 = 4900 – 140 + 1 = 4761$

Третья биноминальная формула также находит свое применение при вычислениях:

$21 \cdot 19 = (20 + 1)(20 – 1) = 400 – 1 = 399$
$22 \cdot 18 = (20 + 2)(20 – 2) = 400 – 4 = 396$
$23 \cdot 17 = (20 + 3)(20 – 3) = 400 – 9 = 391$

Если квадраты чисел до $32^2 = 1024$ включительно выучены наизусть, третью биноминальную формулу можно применять для вычисления очень многих произведений:

$24 \cdot 26 = (25 – 1)(25 + 1) = 625 – 1 = 624$
$21 \cdot 27 = (24 – 3)(24 + 3) = 576 – 9 = 567$
$17 \cdot 27 = (22 – 5)(22 + 5) = 484 – 25 = 459$

2-я группа

В обеих скобках одинаковые знаки (случай 1 и 2)

Раскрой скобки	Преврати трехчлен в произведение
1. $(x + 3)(x + 8) =$	9. $x^2 + 7x + 10 =$

2. $(x + 11)(x + 4) =$
3. $(x + 12)(x + 6) =$
4. $(x + 9)(x + 14) =$
5. $(x + 15)(x + 16) =$
6. $(x + 20)(x + 22) =$
7. $(x + 30)(x + 25) =$
8. $(x + 35)(x + 40) =$
10. $x^2 + 7x + 12 =$
11. $x^2 + 8x + 15 =$
12. $x^2 + 10x + 24 =$
13. $x^2 + 11x + 24 =$
14. $x^2 + 14x + 24 =$
15. $x^2 + 13x + 12 =$
16. $x^2 + 21x + 20 =$
17. $(x – 8)(x – 5) =$
18. $(x – 9)(x – 1) =$
19. $(x – 11)(x – 9) =$
20. $(x – 14)(x – 5) =$
21. $(x – 15)(x – 6) =$
22. $(x – 19)(x – 2) =$
23. $(x – 15)(x – 20) =$
24. $(x – 17)(x – 3) =$
25. $(x – 18)(x – 6) =$
26. $x^2 – 10x + 21 =$
27. $x^2 – 9x + 20 =$
28. $x^2 – 12x + 27 =$
29. $x^2 – 13x + 40 =$
30. $x^2 – 12x + 35 =$
31. $x^2 – 14x + 33 =$
32. $x^2 – 15x + 26 =$
33. $x^2 – 18x + 45 =$
34. $x^2 – 18x + 17 =$

35. $(x + 2y)(x + 5y) =$
36. $(x + 11y)(x + 3y) =$
37. $(x + 9y)(x + 6y) =$
38. $(x + 15y)(x + y) =$
39. $(x – 4y)(x – 7y) =$
40. $(x – 8y)(x – 9y) =$
41. $(x – 12y)(x – 4y) =$
42. $(x – 18y)(x – y) =$
43. $x^2 + 8xy + 15y^2 =$
44. $x^2 + 15xy + 56y^2 =$
45. $x^2 + 17xy + 52y^2 =$
46. $x^2 + 11xy + 10y^2 =$
47. $x^2 – 9xy + 18y^2 =$
48. $x^2 – 11xy + 28y^2 =$
49. $x^2 – 17xy + 42y^2 =$
50. $x^2 – 21xy + 20y^2 =$

3-я группа

В скобках различные знаки (случаи 3 и 4)

Раскрой скобки

1. $(x – 5)(x + 8) =$
2. $(x + 10)(x – 2) =$
3. $(x – 11)(x + 20) =$

Преврати трехчлен в произведение

7. $x^2 + 5x – 24 =$
8. $x^2 + 7x – 18 =$
9. $x^2 + 4x – 60 =$

4. $(x + 15)(x - 8) =$
5. $(x + 12)(x - 11) =$
6. $(x + 14)(x - 7) =$

10. $x^2 + 6x - 55 =$
11. $x^2 + 5x - 84 =$
12. $x^2 + 12x - 160 =$

13. $(x - 10)(x + 3) =$
14. $(x + 2)(x - 12) =$
15. $(x + 3)(x - 9) =$
16. $(x - 11)(x + 4) =$
17. $(x - 15)(x + 3) =$
18. $(x + 9)(x - 14) =$

19. $x^2 - 6x - 40 =$
20. $x^2 - 6x - 16 =$
21. $x^2 - 9x - 22 =$
22. $x^2 - 12x - 13 =$
23. $x^2 - 100x - 101 =$
24. $x^2 - x - 30 =$

25. $(x + 18)(x - 4) =$
26. $(x - 17)(x + 3) =$
27. $(x - 6)(x + 12) =$

28. $x^2 + 11x - 12 =$
29. $x^2 - 16x - 36 =$
30. $x^2 - 7x - 120 =$

31. $(x + 6y)(x - 2y) =$
32. $(x - 5y)(x + 6y) =$
33. $(x + 12y)(x - 10y) =$
34. $(x + 13y)(x - y) =$
35. $(x + 7y)(x - 5y) =$
36. $(x - 8y)(x + 7y) =$
37. $(x - 15y)(x + 10y) =$
38. $(x - 11y)(x + y) =$

39. $x^2 + 7xy - 18y^2 =$
40. $x^2 + xy - 12y^2 =$
41. $x^2 + 10xy - 75y^2 =$
42. $x^2 + 20xy - 21y^2 =$
43. $x^2 - 4xy - 12y^2 =$
44. $x^2 - xy - 72y^2 =$
45. $x^2 - 10xy - 200y^2 =$
46. $x^2 - 8xy - 9y^2 =$

4-я группа

На все 4 случая

Раскрой скобки

1. $(a + 7)(a + 3) =$
2. $(a + 11)(a + 2) =$
3. $(x + 4)(x + 1) =$

7. $(x - 4)(x - 6) =$
8. $(x - 7)(x - 4) =$

Преврати трехчлен в произведение

4. $a^2 + 7a + 12 =$
5. $a^2 + 15a + 50 =$
6. $x^2 + 9x + 8 =$

10. $x^2 - 8x + 15 =$
11. $x^2 - 12x + 20 =$

9. $(a - 1)(a - 11) = 12.$

12. $x^2 - 10x + 9 =$

13. $(a - 5)(a + 6) =$
14. $(a - 9)(a + 10) =$
15. $(a - 5)(a + 9) =$

16. $a^2 + 5a - 14 =$
17. $a^2 + a - 42 =$
18. $a^2 + 4a - 45 =$

19. $(a - 12)(a + 3) =$
20. $(x - 15)(x + 9) =$
21. $(x - 7)(x + 6) =$

22. $a^2 - 5a - 36 =$
23. $x^2 - 13x - 30 =$
24. $x^2 - 8x - 33 =$

25. $(x + 3y)(x - 5y) =$
26. $(a + 6b)(a + 13b) =$
27. $(a - 5b)(a - 17b) =$

28. $x^2 - 3xy - 28y^2 =$
29. $a^2 + 18ab + 65b^2 =$
30. $a^2 - 20ab + 91b^2 =$

31. $(x - 4y)(x + 9y) =$
32. $(a + 11b)(a - 10b) =$
33. $(x - 12y)(x + 3y) =$

34. $x^2 + 14xy - 51y^2 =$
35. $a^2 + ab - 240b^2 =$
36. $x^2 - 13xy - 30y^2 =$

37. $(a - 13b)(a - 6b) =$
38. $(x - 7y)(x + 14y) =$
39. $(a - 11b)(a + b) =$

40. $a^2 - 22ab + 120b^2 =$
41. $x^2 + 6xy - 72y^2 =$
42. $a^2 - 9ab - 10b^2 =$

5-я группа

Задачи на применение *биноминальных формул*:

1. $(2 + 5b)^2 =$
2. $(3a + 7)^2 =$
3. $(5x + 11)^2 =$

4. $16 + 24b + 9b^2 =$
5. $9a^2 + 30a + 25 =$
6. $49x^2 + 168x + 144 =$

7. $(4 - 9b)^2 =$
8. $(8a - 3)^2 =$
9. $(14x - 13)^2 =$

10. $36 - 84b + 49b^2 =$
11. $121a^2 - 66a + 9 =$
12. $225x^2 - 480x + 256 =$

13. $(2x + 3y)^2 =$
14. $(5u + 7v)^2 =$
15. $(8m + 9n)^2 =$

16. $9x^2 + 30xy + 25y^2 =$
17. $36u^2 + 24uv + 4v^2 =$
18. $49m^2 + 56mn + 16n^2 =$

19. $(6a - 11b)^2 =$
20. $(a - 15b)^2 =$

22. $25a^2 - 100ab + 100b^2 =$
23. $a^2 - 24ab + 144b^2 =$

21. $(10a - 12b)^2 =$

24. $400a^2 - 360ab + 81b^2 =$

25. $(9a + 1)(9a - 1) =$

26. $(4a - 5b)(94a + 5b) =$

27. $(11x - 2y)(11x + 2y) =$

28. $25b^2 - 1 =$

29. $49a^2 - 36b^2 =$

30. $169x^2 - 16y^2 =$

Дополни до биноминальных формул:

31. $(...)^2 = 4a^2 + ... + 9b^2$
32. $(5x + ...)^2 = ... + ... + 64y^2$
33. $(... - ...)^2 = 121a^2 - 44ab + ...$
34. $(5a - ...)(5a + ...) = ... - 49b^2$
35. $(... - 9y)(... + ...) = 100x^2 - ...$
36. $(... + ...)(... - 1) = a^2 - ...$
37. $(... - 5y)^2 = ... - 90xy + ...$
38. $(... ...)^2 = ... - 24xy + 144y^2$
39. $(... ...)^2 = 36a^2 - ... + 121b^2$
40. $(a + ...)(... - ...) = ... - b^2$
41. $(... + y)(... - ...) = x^4 - ...$
42. $(9a^2 + ...)(... - ...) = ... - 25b^4$.

6-я группа

Трехчлены и биноминальные формулы вперемежку: преврати в произведение двух скобок:

1. $x^2 + 11x + 28 =$
2. $x^2 + 12x + 27 =$
3. $x^2 + 15x + 36 =$
4. $x^2 + 18x + 65 =$
5. $x^2 + 12x + 36 =$
6. $x^2 + 10x + 16 =$
7. $x^2 + 12x + 11 =$
8. $x^2 + 8x + 16 =$
9. $x^2 + 14x + 49 =$
10. $x^2 + 25x + 100 =$
11. $x^2 - 11x + 30 =$
12. $x^2 - 18x + 81 =$
13. $x^2 - 9x + 14 =$
14. $x^2 - 24x + 144 =$
16. $x^2 + 5x - 36 =$
17. $x^2 + 12x - 64 =$

15. $x^2 - 29x + 100 =$

18. $x^2 + 2x - 15 =$

19. $x^2 + x - 20 =$

20. $x^2 - 144 =$

21. $x^2 + x - 110 =$

22. $x^2 - 64 =$

23. $x^2 - 4x - 45 =$

24. $x^2 - 4x - 21 =$

25. $x^2 - 8x - 33 =$

26. $x^2 - 32x - 144 =$

27. $x^2 - 12x - 64 =$

28. $x^2 - 36 =$

29. $x^2 - 16x - 36 =$

30. $x^2 - 100 =$

31. $x^2 + 9xy + 18y^2 =$

32. $x^2 + 26xy + 169y^2 =$

33. $4x^2 + 20xy + 25y^2 =$

34. $x^2 - 13xy + 42y^2 =$

35. $x^2 - 22xy + 121y^2 =$

36. $9x^2 - 24xy + 16y^2 =$

37. $x^2 + 3xy - 18y^2 =$

38. $x^2 - 225y^2 =$

39. $4x^2 - 49y^2 =$

40. $x^2 - 9xy - 22y^2 =$

41. $9x^2 - 100y^2 =$

42. $x^2 - xy - 110y^2 =$

Скобки, раскрытие которых приводит к сумме четырех одночленов, и обращение суммы одночленов в произведение двух скобок

В главе 2 мы рассматривали такие задания только с *положительными* числами, например:

$$(3a + 4b) \cdot (6a + 7) = 18a^2 + 21a + 24ab + 28b.$$

Как можно проделать обратное преобразование в произведение двух скобок?

1-й путь:

$$18a^2 + 21a + 24ab + 28b = 3a(6a + 7) + 4b(6a + 7).$$

Из двух первых слагаемых мы можем вынести за скобки *3a*, из двух других *4b*. В обеих скобках стоит одна и та же сумма $6a + 7$. Эту скобку мы и можем вынести за скобки:

$$3a(6a + 7) + 4b(6a + 7) = (6a + 7) \cdot (3a + 4b).$$

Скобки поменялись местами против первоначального их положения; но это, разумеется, их право.

2-й путь:

Из *первого* и *третьего* слагаемого выносим за скобки *6a*, из *второго* и *четвертого 7*.

$$18a^2 + 21a + 24ab + 28b = 6a \cdot (3a + 4b) + 7 \cdot (3a + 4b).$$

Далее:

$$6a \cdot (3a + 4b) + 7 \cdot (3a + 4b) = (3a + 4b) \cdot (6a + 7).$$

Теперь скобки снова в прежнем порядке.

Ничего по сути не меняется, если в скобках оказываются *разности*. Пути решения те же.

1-й пример на разности:

Раскрываем скобки:

$$(a + 2b) \cdot (a - 3) = a^2 - 3a + 2ab - 6b.$$

Выносим за скобки:

$$a^2 - 3a + 2ab - 6b = a \cdot (a - 3) + 2b \cdot (a - 3) = \\ = (a - 3) \cdot (a + 2b).$$

Или:

$$a^2 - 3a + 2ab - 6b = a \cdot (a + 2b) - 3 \cdot (a + 2b).$$

Если из второго и четвертого слагаемого мы вынесем за скобки –3, тогда во вторую скобку попадут $+a$ и $+2b$; и скобка снова может быть вынесена:

$$a \cdot (a + 2b) - 3 \cdot (a + 2b) = (a + 2b) \cdot (a - 3).$$

2-й пример:

$$(3a - b) \cdot (2a - 5) = 6a^2 - 15a - 2ab + 5b.$$

Выносим за скобки:

$$6a^2 - 15a - 2ab + 5b = 3a \cdot (2a - 5) - b \cdot (2a - 5).$$

Из третьего и четвертого слагаемого выносим за скобки –

b: в скобки попадают $+2a$ и -5. Для проверки снова раскроем скобки и получим третье и четвертое слагаемое с правильными знаками: $-b \cdot (2a - 5) = -2ab + 5b$.

$$3a \cdot (2a - 5) - b \cdot (2a - 5) = (2a - 5) \cdot (3a - b).$$

Или:

$$6a^2 - 15a - 2ab + 5b = 2a \cdot (3a - b) - 5 \cdot (3a - b) = \\ = (3a - b) \cdot (2a - 5).$$

В примерах такого рода мы должны на первом этапе вынести за скобки *отрицательный* множитель. В следующих примерах будем решать только обратную задачу, не занимаясь раскрытием скобок.

3-й пример:

$$5a^2 - 15a - 2ab + 6b = 5a \cdot (a - 3) - 2b \cdot (a - 3) = \\ = (a - 3) \cdot (5a - 2b).$$

Или:

$$5a^2 - 15a - 2ab + 6b = a \cdot (5a - 2b) - 3 \cdot (5a - 2b) = \\ = (5a - 2b) \cdot (a - 3).$$

4-й пример:

$$12a^2 - 4a - 3ab + b = 4a \cdot (3a - 1) - b \cdot (3a - 1) = \\ = (3a - 1) \cdot (4a - b).$$

Или:

$$12a^2 - 4a - 3ab + b = 3a \cdot (4a - b) - 1 \cdot (4a - b) = \\ = (4a - b) \cdot (3a - 1).$$

Из третьего и четвертого слагаемого следует вынести за скобки совершенно особенный множитель, а именно –1.

5-й пример:

$$8a^2 + 28a - 10ab - 35b = 4a \cdot (2a + 7) - 5b \cdot (2a + 7) = \\ = (2a + 7) \cdot (4a - 5b).$$

Или:

$$8a^2 + 28a - 10ab - 35b = 2a \cdot (4a - 5b) + 7 \cdot (4a - 5b) = \\ = (4a - 5b) \cdot (2a + 7).$$

7-я группа

Раскрой скобки:

1. $(a + x)(m + n) =$
2. $(b + y)(p + q) =$
3. $(u + v)(a - b) =$
4. $(k - z)(r - s) =$
9. $(a + 2)(u + v) =$
10. $(x + y)(a - 4) =$
11. $(a + 1)(b + 2) =$
12. $(2a + 1)(3b + 4) =$
17. $(8a + 2b)(3a + 6) =$
18. $(6x - 2y)(5x - 4) =$
19. $(9a - 3)(4a - b) =$
20. $(9x - y)(5 + 3y) =$
25. $(5x + 9)(6x^2 + 11) =$
26. $(11a + 7)(3a^2 + 2) =$
27. $(9b - 4)(2b^2 + 6) =$
28. $(13a^2 - 7)(5a - 4) =$

Преврати сумму одночленов в произведение двух скобок:

5. $ax + ay + bx + by =$
6. $mp + mq + np + nq =$
7. $ra - rb + sa - sb =$
8. $ux - uy - vx + vy =$
13. $ax + bx + 3a + 3b =$
14. $ax - 5a + bx - 5b =$
15. $xy + 2x + y + 2 =$
16. $10xy + 14x + 15y + 21 =$
21. $8a^2 + 10a + 12ab + 15b =$
22. $35x^2 - 15x - 21xy + 9y =$
23. $10a^2 - 5ab - 8a + 4b =$
24. $49x + 35xy - 7y - 5y^2 =$
29. $15a^3 + 20a^2 + 21a + 28 =$
30. $36x^3 + 63x^2 + 20x + 35 =$
31. $9b^3 - 6b^2 + 15b - 10 =$
32. $32a^3 - 56a^2 - 20a + 35 =$

Разложение на множители и сокращение алгебраических дробей

Особенно важно разложение на множители при сокраще-

нии алгебраических дробей, поскольку сокращать можно только *множители*, но не слагаемые.

Пример: $$\frac{40}{12}=\frac{5\cdot\cancel{8}}{3\cdot\cancel{4}}=\frac{5\cdot 2}{3\cdot 1}=\frac{10}{3}$$

Поскольку 8 и 4, находясь в числителе и знаменателе, являются *множителями*, их можно сократить.

Антипример: $$\frac{5+\cancel{8}}{3+\cancel{4}}=\frac{13}{7}$$

Если в этом примере “сокращаются” 8 и 4, то результат оказывается неправильным:

$$\frac{5+\cancel{8}}{3+\cancel{4}}\neq\frac{5+2}{3+1}=\frac{7}{4}$$

Между первой и второй дробью нельзя поставить знак равенства; мы должны заменить его знаком ≠ (неравенства).

Если в числителе и знаменателе алгебраической дроби встречаются суммы или разности, нам потребуется сперва преобразовать их в произведения, и только после этого равные сомножители можно будет сократить.

Примеры:

$$\frac{3a+3b}{a^2+ab}=\frac{3(a+b)}{a(a+b)}=\frac{3}{a}$$

$$\frac{5a+5b}{10c+10d}=\frac{5(a+b)}{10(c+d)}=\frac{a+b}{2(c+d)}$$

$$\frac{6x+15y+3}{14x+35y+7}=\frac{3(2x+5y+1)}{7(2x+5y+1)}=\frac{3}{7}$$

$$\frac{a^2+a}{5a+5}=\frac{a(a+1)}{5(a+1)}=\frac{a}{5}$$

Во всех приведенных примерах в числителе и знаменателе за скобки можно было вынести одно отдельное число. В

скобках тогда оказывались суммы, и, если в числителе и знаменателе оказывались одинаковые суммы, их можно было сократить, поскольку скобки в данном случае — это *сомножители*. В результате вынесения за скобки происходит важная метаморфоза — суммы (или разности) превращаются в произведения.

Может так оказаться, что числитель или знаменатель (или оба вместе) содержат трехчлены, которые можно представить в виде произведения двух скобок:

$$\frac{a^2+8a+15}{3a+9}=\frac{(a+5)(a+3)}{3(a+3)}=\frac{a+5}{3}$$

$$\frac{a^2+4a}{a^2+6a+8}=\frac{a(a+4)}{(a+2)(a+4)}=\frac{a}{a+2}$$

$$\frac{a^2+10a+21}{a^2+9a+14}=\frac{(a+3)(a+7)}{(a+2)(a+7)}=\frac{a+3}{a+2}$$

Во всех примерах третья дробь существенно проще первой. Подставим в последний пример вместо *a* числа 1, 2, 3... (в первую и третью дробь):

	$\frac{a^2+10a+21}{a^2+9a+14}$	$\frac{a+3}{a+2}$
a=1	$\frac{1^2+10+21}{1^2+9+14}=\frac{32}{24}=\frac{4}{3}$	$\frac{1+3}{1+2}=\frac{4}{3}$
a=2	$\frac{2^2+20+21}{2^2+18+14}=\frac{45}{36}=\frac{5}{4}$	$\frac{2+3}{2+2}=\frac{5}{4}$
a=3	$\frac{3^2+30+21}{3^2+27+14}=\frac{60}{50}=\frac{6}{5}$	$\frac{3+3}{3+2}=\frac{6}{5}$

Мы видим: третья дробь всегда оказывается сокращенной формой первой. И так для любого *a*.

Примеры с вычитанием:

$$\frac{a^2-7a+10}{7a-35}=\frac{(a-2)(a-5)}{7(a-5)}=\frac{a-2}{7}$$

$$\frac{5a-15}{a^2-7a+12}=\frac{5(a-3)}{(a-3)(a-4)}=\frac{5}{a-4}$$

$$\frac{a^2-5a+6}{a^2-6a+8}=\frac{(a-2)(a-3)}{(a-2)(a-4)}=\frac{a-3}{a-4}$$

Подставим в последний пример вместо *a* числа 5, 6, 7...:

	$\frac{a^2-5a+6}{a^2-6a+8}$	$\frac{a-3}{a-4}$
a=5	$\frac{5^2-25+6}{5^2-30+18}=\frac{6}{3}=2$	$\frac{5-3}{5-4}=\frac{2}{1}$
a=6	$\frac{6^2-30+6}{6^2-36+18}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$	$\frac{6-3}{6-4}=\frac{3}{2}$
a=7	$\frac{7^2-35+6}{7^2-42+18}=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$	$\frac{7-3}{7-4}=\frac{4}{3}$

В числителе и знаменателе могут оказаться и биноминальные формулы:

$$\frac{a^2+10a+25}{3a+15}=\frac{(a+5)^2}{3(a+5)}=\frac{a+5}{3}$$

$$\frac{2a+20}{a^2+20a+100}=\frac{2(a+10)}{(a+10)^2}=\frac{2}{a+10}$$

$$\frac{a^2-8a+16}{a^2-16}=\frac{(a-4)^2}{(a-4)(a+4)}=\frac{a-4}{a+4}$$

$$\frac{a^2-9}{a^2+6a+9}=\frac{(a-3)(a+3)}{(a+3)^2}=\frac{a-3}{a+3}$$

Подставим в последний пример вместо *a* числа 4, 5, 6...:

	$\frac{a^2-9}{a^2+6a+9}$	$\frac{a-3}{a+3}$
a=4	$\frac{4^2-9}{4^2+24+9}=\frac{7}{49}=\frac{1}{7}$	$\frac{4-3}{4+3}=\frac{1}{7}$
a=5	$\frac{5^2-9}{5^2+30+9}=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$	$\frac{5-3}{5+3}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$
a=6	$\frac{6^2-9}{6^2+36+9}=\frac{27}{81}=\frac{1}{3}$	$\frac{6-3}{6+3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

В данном случае третья дробь сокращена алгебраически. Однако для определенных значений *a* ее можно сокращать и далее.

Трехчлены и биноминальные формулы могут встречаться в одной и той же дроби.

$$\frac{a^2-20a+100}{a^2-12a+20}=\frac{(a-10)^2}{(a-10)(a-2)}=\frac{a-10}{a-2}$$

$$\frac{a^2-8a+15}{a^2-9}=\frac{(a-3)(a-5)}{(a-3)(a+3)}=\frac{a-5}{a+3}$$

$$\frac{a^2+14a+49}{a^2+9a+14}=\frac{(a+7)^2}{(a+2)(a+7)}=\frac{a+7}{a+2}$$

Подставим в последний пример вместо *a* числа 1, 2, 3...:

	$\frac{a^2+14a+49}{a^2+9a+14}$	$\frac{a+7}{a+2}$
a=1	$\frac{1+14+49}{1+9+14}=\frac{64}{24}=\frac{8}{3}$	$\frac{1+7}{1+2}=\frac{8}{3}$

a=2 $\quad \dfrac{4+28+49}{4+18+14}=\dfrac{81}{36}=\dfrac{9}{4} \qquad \dfrac{2+7}{2+2}=\dfrac{9}{4}$

a=3 $\quad \dfrac{9+42+49}{9+27+14}=\dfrac{100}{50}=2 \qquad \dfrac{3+7}{3+2}=\dfrac{10}{5}=2$

Примеры на “четырехчлены” в числителе и знаменателе:

$$\frac{6a^2+15a+2ab+5b}{15a^2+9a+5ab+3b}=\frac{3a(2a+5)+b(2a+5)}{3a(5a+3)+b(5a+3)}=$$

$$=\frac{(3a+b)(2a+5)}{(5a+3)(3a+b)}=\frac{2a+5}{5a+3}$$

$$\frac{18x^2+3x-24xy-4y}{6x^2+21x-8xy-28y}=\frac{3x(6x+1)-4y(6x+1)}{3x(2x+7)-4y(2x+7)}=$$

$$=\frac{(6x+1)(3x-4y)}{(2x+7)(3x-4y)}=\frac{6x+1}{2x+7}$$

$$\frac{8a^3-36a^2-6a+27}{20a^3-16a^2-15a+12}=\frac{4a^2(2a-9)-3(2a-9)}{4a^2(5a-4)-3(5a-4)}=$$

$$=\frac{(2a-9)(4a^2-3)}{(5a-4)(4a^2-3)}=\frac{2a-9}{5a-4}$$

Может случиться, что для определенных значений a при подстановке возникнут сложности. Это будет происходить всякий раз, когда знаменатель обращается в 0.

Пример:

$$\frac{a^2-25}{a^2-7a+10}=\frac{(a-5)(a+5)}{(a-5)(a-2)}=\frac{a+5}{a-2}$$

Подставим целые числа от 1 до 6:

	$\frac{a^2-25}{a^2-7a+10}$	$\frac{a+5}{a-2}$
a=1	$\frac{1^2-25}{1^2-7+10}=\frac{-24}{4}=-6$	$\frac{1+5}{1-2}=\frac{6}{-1}=-6$
a=2	$\frac{2^2-25}{2^2-14+10}=\frac{-21}{0}$	$\frac{2+5}{2-2}=\frac{7}{0}$
a=3	$\frac{3^2-25}{3^2-21+10}=\frac{-16}{-2}=8$	$\frac{3+5}{3-2}=\frac{8}{1}=8$
a=4	$\frac{4^2-25}{4^2-28+10}=\frac{-9}{2}=\frac{9}{2}$	$\frac{4+5}{4-2}=\frac{9}{2}$
a=5	$\frac{5^2-25}{5^2-35+10}=\frac{0}{0}$	$\frac{5+5}{5-2}=\frac{10}{3}$
a=6	$\frac{6^2-25}{6^2-42+10}=\frac{11}{4}$	$\frac{6+5}{6-2}=\frac{11}{4}$

Для *a*=2 в обеих дробях нулевые знаменатели, числители же 0 не равны. Ни $^{-21}/_0$, ни $^1/_0$ никакого определенного смысла не имеют.

Для *a* = 5 как числитель, так и знаменатель первой дроби обращаются в ноль. Вторая же дробь превращается во вполне определенное число $^{10}/_3$. Как это понять? Полный ответ на этот вопрос будет дан в 12-м классе, когда рассмотрение будет дополнено функциональным подходом и средствами дифференциального исчисления.

В завершение перечислим вкратце использованные методы вынесения за скобки:

1. Вынесение одного-единственного множителя.
2. Разложение трех- и четырехчленов в произведение двух скобок.

3. Биноминальные формулы.

Школьники, легко справляющиеся с простыми примерами, могут получить более сложные задания, в которых сперва нужно вынести за скобки один множитель, а затем уже применить метод 2 или 3. Например:

$$\frac{3x^2+30x+75}{6x+30}=\frac{3(x^2+10x+25)}{6(x+5)}=\frac{3(x+5)^2}{6(x+5)}=\frac{x+5}{2}$$

$$\frac{x^2+2x}{7x^2+49x+70}=\frac{x(x+2)}{7(x^2+7x+10)}=\frac{x(x+2)}{7(x+2)(x+5)}=\frac{x}{7(x+5)}$$

$$\frac{5x^2-30x+45}{x^3-9x}=\frac{5(x^2-6x+9)}{x(x^2-9)}=\frac{5(x-3)^2}{x(x+3)(x-3)}=\frac{5(x-3)}{x(x+3)}$$

8-я группа

Сократи алгебраическую дробь, преобразуя числитель и знаменатель в произведение. Действуй, либо вынося за скобки отдельный сомножитель, либо раскладывая на множители трехчлены:

1. $\frac{15a+10}{21a+14}=$ 2. $\frac{30a+42}{45a+63}=$ 3. $\frac{44a+99}{8a+18}=$

4. $\frac{21a+42}{14a+28}=$ 5. $\frac{42a+42}{7a+7}=$ 6. $\frac{18a+90}{6a+30}=$

7. $\frac{a^2+a}{ab+b}=$ 8. $\frac{a^2+2a}{3a+6}=$ 9. $\frac{4a^2+20a}{7a^2+35a}=$

10. $\frac{3a^3+3a^2b}{2ab+2b^2}=$ 11. $\frac{9a^2b+9ab^2}{3ab+3b^2}=$ 12. $\frac{14a^2b^2+14ab^2}{7a^2+7a}=$

13. $\frac{10a+15b+35}{6a+9b+21}=$ 14. $\frac{21x+14y+7}{33x+22y+11}=$ 15. $\frac{8x^2+8y^2-8}{24x^2+24y^2-24}=$

16. $\frac{x^2+5x+6}{x^2+7x+10}=$ 17. $\frac{x^2+9x+14}{x^2+10x+21}=$ 18. $\frac{x^2+13x+36}{x^2+5x+4}=$

19. $\frac{x^2+10x+24}{x^2+15x+54}=$ 20. $\frac{x^2+17x+30}{x^2+18x+45}=$ 21. $\frac{x^2+16x+60}{x^2+18x+80}=$

22. $\frac{x^2+7x}{x^2+11x+28}=$ 23. $\frac{2x^3+10x^2}{x^2+16x+55}=$ 24. $\frac{x^3+x^2}{x^2+3x+2}=$

25. $\frac{x^2+14x+48}{3x+24}=$ 26. $\frac{x^2+17x+70}{3x^2+30x}=$ 27. $\frac{x^2+13x+22}{5x+55}=$

9-я группа:

Сократи алгебраические дроби; среди которых попадаются примеры на биноминальные формулы и “четырехчлены”:

1. $\frac{10a+15ab}{15a+20ab}=$ 2. $\frac{3x^2+3xy}{6x^2}=$ 3. $\frac{21a^2}{14a^2+28a}=$

4. $\frac{6x+8y}{3x^2+4xy}=$ 5. $\frac{6a+15a^2}{4b+10ab}=$ 6. $\frac{x^3+x^2y}{2xy+2y^2}=$

7. $\frac{a+2a^2+3a^3}{2+4a+6a^2}=$ 8. $\frac{21+35y+49y^2}{15+25y+35y^2}=$ 9. $\frac{a^2+a^2b+ab}{ab+ab^2+b^2}=$

10. $\frac{x^2+7x+10}{x^2+8x+15}=$ 11. $\frac{x^2+11x+28}{x^2+15x+44}=$ 12. $\frac{x^2+17x+30}{x^2+18x+45}=$

13. $\frac{x^2+10x+25}{x^2-25}=$ 14. $\frac{4a^2+12ab+9b^2}{4a^2-9b^2}=$ 15. $\frac{1+14b+49b^2}{1-49b^2}=$

16. $\frac{x^2+2x-15}{x^2+x-20}=$ 17. $\frac{x^2+7x-8}{x^2+6x-16}=$ 18. $\frac{x^2-3x-10}{x^2+2x-35}=$

19. $\frac{ab+3a+2b+6}{2ab+5a+4b+10}=$ 20. $\frac{x^2+xy+2x+2y}{y^2+xy+3x+3y}=$

21. $\frac{2+2x+y+xy}{4+4x+5y+5xy}=$ 22. $\frac{9x^2-30xy+25y^2}{21x-35y}=$

23. $\frac{5a^2-10ab}{a^2-4ab+4b^2}=$ 24. $\frac{a^2-10ab+25b^2}{7a-35b}=$

25. $\frac{x^2+xy-12y^2}{x^2-6xy+9y^2}=$ 26. $\frac{16a^2+40ab+25b^2}{16a^2-25b^2}=$

27. $\frac{x^2+18xy+81y^2}{x^2+5xy-36y^2}=$

10-я группа:

Сократи алгебраические дроби. Среди последних примеров попадаются и такие, где сначала нужно вынести за скобки отдельные множители, а затем применить биноминальные формулы:

1. $\frac{a^2+ab}{ab+b^2}=$ 2. $\frac{a^2+ab}{a^2-ab}=$ 3. $\frac{26x+39y}{39x+26y}=$

4. $\frac{x^2+5x}{2x+10}=$ 5. $\frac{8x^2+4xy}{6xy+3y^2}=$ 6. $\frac{x^3+x^2y}{yx+y^2}=$

7. $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}=$ 8. $\frac{9x+9}{x^2-1}=$ 9. $\frac{x^2-x}{x^2-1}=$

10. $\frac{x^2+3x+2}{11x+22}=$ 11. $\frac{x^2+5x}{x^2+8x+15}=$ 12. $\frac{xy+y}{x^2-1}=$

13. $\frac{7x^2+14x+21}{x^3+2x^2+3x}=$ 14. $\frac{a+5a^2-ab}{b+5ab-b^2}=$ 15. $\frac{ab+a^2b+ab^2}{3+3a+3b}=$

16. $\frac{a^2b+ab^2}{a^2c+abc}=$ 17. $\frac{a^3b+a^2b^2}{a^2b^2+ab^3}=$ 18. $\frac{5x-10}{7x^2-28}=$

19. $\frac{9x+15}{9x^2-25}=$ 20. $\frac{7x+7}{x^2-1}=$ 21. $\frac{x^2+x}{x^3-x}=$

22. $\frac{x^2-10x+25}{9x-45}=$ 23. $\frac{x^2+16x+64}{x^2-64}=$ 24. $\frac{4x^2+12x+9}{4x^2-9}=$

25. $\frac{x^3+2x^2+x}{x^2+x}=$ 26. $\frac{yx^2+2xy+y^3}{yx^2-y^3}=$ 27. $\frac{x^4-y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}=$

11-я группа:

Более трудные примеры на сокращение алгебраических дробей. Во всех заданиях, прежде чем будут применены биноминальные формулы или приемы разложения трехчленов, следует сперва вынести за скобки отдельный множитель.

1. $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^2b-b^3}=$ 2. $\frac{3a^2-6ab+3b^2}{5a^2-5b^2}=$

3. $\dfrac{7a^2b+14ab^2+7b^3}{2a^3b-2ab^3}=$

4. $\dfrac{50x^2+20xy+2y^2}{75x^2-3y^2}=$

5. $\dfrac{x^3+7x^2+12x}{5x^2+25x+30}=$

6. $\dfrac{7x^2-7x-84}{x^3-3x^2-18x}=$

7. $\dfrac{3x^3+21x^2+18x}{11x^2-11}=$

8. $\dfrac{x^3-9x}{5x^2-35x-150}=$

9. $\dfrac{4a^3+12a^2b+9ab^2}{12a^2-27b^2}=$

10. $\dfrac{48a^2b-24ab^2+3b^3}{80a^3-5ab^2}=$

11. $\dfrac{a^2b-2ab^2+b^3}{a^3-ab^2}=$

12. $\dfrac{13a^2+26ab+13b^2}{7a^2-7b^2}=$

13. $\dfrac{3x^3+6x^2y+3xy^2}{5x^2y+5xy^2}=$

14. $\dfrac{36x^2 24xy+4y^2}{63x^2-7y^2}=$

15. $\dfrac{a^3+7a^2+10a}{6a^2+48a+90}=$

16. $\dfrac{3a^2+9a-30}{a^3+2a^2-8a}=$

17. $\dfrac{5a^3+20a^2+15a}{13a^2-13}=$

18. $\dfrac{a^3-25a}{11a^2+33a-110}=$

19. $\dfrac{9x^3+30x^2y+25xy^2}{18x^2-50y^2}=$

20. $\dfrac{125x^2y-50xy^2+5y^3}{75x^3-3xy^2}=$

Примеры на повторение сокращения алгебраических дробей

1-я группа

1. $\dfrac{5a+10b}{11a+22b}=$

2. $\dfrac{3a+6b+9c}{5a+10b+15c}=$

3. $\dfrac{7a+14b}{14a+7b}=$

4. $\dfrac{21x^2+21x}{28x^2+28x}=$

5. $\dfrac{6x^2+6xy}{9xy+9y^2}=$

6. $\dfrac{6x^2+6xy}{9xy+9y^2}=$

Алгебраическое деление

Деление — это операция, противоположная умножению. В главе 5 мы вывели для деления правило знаков:

$$+ : + = +$$
$$– : + = –$$
$$+ : – = –$$
$$– : – = +$$

Разумеется, данную таблицу нужно понимать символически. Простые знаки, естественно, нельзя делить друг на друга.

Кроме правила знаков следует иметь в виду правило деления степеней с одинаковым основанием:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \ (m>n)$$

То же самое в дробном виде:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (m>n)$$

Словом, для того, чтобы разделить две степени с одинаковым основанием, необходимо из показателя делимого вычесть показатель делителя.

Примеры:

$$a^5 : a^3 = a^2 \qquad 2^7 : 2^3 = 2^4 \qquad 3^6 : 3 = 3^6 : 3^1 = 3^5$$

Если записать эти примеры в дробном виде, то все сразу станет ясно:

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^2$$

Три множителя *a* можно сократить — при этом и в числителе, и в знаменателе после каждого сокращения по сути следовало бы писать по одному сомножителю 1, — и два

множителя *a* остаются в числителе.

Тот же пример, но уже совершенно корректно:

$$\frac{a^5}{a^3}=\frac{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot a\cdot a}{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{a}}=\frac{1\cdot1\cdot1\cdot a\cdot a}{1\cdot1\cdot1}=a^2$$

По опыту мы знаем, что 1 при сокращении в одних случаях может быть опущена, в других — обязательно должна быть сохранена. Примеры:

$$\frac{\cancel{8}}{4}=\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{4}}=2 \qquad \frac{4}{\cancel{8}}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{2}{\cancel{8}}}=\frac{1}{2}$$

Во втором примере число 1, конечно же, нельзя опустить. У учеников должно возникнуть понимание, когда 1 нужно оставить, а когда можно пропустить.

Примеры на дроби со степенями:

$$\frac{15a^3}{25a}=\frac{3a^2}{5} \qquad \frac{21a^4}{7a^3}=3a \qquad \frac{6a^5}{12a^2}=\frac{a^3}{2} \qquad \frac{12a^7b^6}{28a^2b^3}=\frac{3a^5b^3}{7}$$

В виде деления:

$24a^6 : 6a^4 = 4a^2$ $\qquad 45a^3 : 9a^2 = 5a$ $\qquad 22a^8b^5 : 11a^4b^4 = 2a^5b$

Если показатель знаменателя превосходит показатель числителя, то степень остается в знаменателе:

$$\frac{a^2}{a^5}=\frac{\cancel{a}\cdot\cancel{a}}{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot a\cdot a\cdot a}=\frac{1\cdot1}{1\cdot1\cdot a\cdot a\cdot a}=\frac{1}{a^3}$$

Если $m < n$, то в общем случае верно:

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$$

Примеры:

$$\frac{35a^2}{25a^3}=\frac{7}{4a} \qquad \frac{26a^4}{13a^7}=\frac{2}{a^3} \qquad \frac{21a^4b^2}{14a^3b^5}=\frac{3a}{2b^3} \qquad \frac{215a^5b^2c}{10a^4b^2c^3}=\frac{3a}{2c^2}$$

Деление, при котором появляются отрицательные числа:

$(-6a^3) : (+3a^2) = -2a$ $\qquad$ $(12a^4) : (-3a) = -4a^3$

$(21a^5) : (-7a^3) = -3a^2$

$$\frac{-12a^4}{2a} = -6a^3 \qquad \frac{28a^4}{-7a^6} = \frac{4}{-a^2} = -\frac{4}{a^2}$$

$$\frac{-35a^3}{40a} = \frac{-7a^2}{8} = -\frac{7a^2}{8}$$

Если числитель или знаменатель дроби (но не оба сразу!) отрицателен, то и вся дробь отрицательна. Знак “минус” можно в этом случае написать на уровне дробной черты *перед* дробью.

$$\frac{-63a^2}{-70a^5} = \frac{9}{10a^3} \qquad \frac{27a^4b^2}{-9a^6b} = \frac{3b}{-a^2} = -\frac{3b}{a^2}$$

$$\frac{-36ab^2}{9a^2b^3} = \frac{-4}{ab} = -\frac{4}{ab}$$

Можно делить и *суммы*. Вот правило:

Для деления суммы необходимо делить каждое слагаемое.

$(35x^2 + 42x) : 7 = 5x^2 + 6x$ $\qquad$ $7(5x^2 + 6x) = 35x^2 + 42x$

$(21a^4 + 12a) : 3a = 7a^3 + 4$ $\qquad$ $3a(7a^3 + 4) = 21a^4 + 12a$

$(30a^2b + 25ab^2) : 5ab = 6a + 5b$ $\qquad$ $5ab(6a + 5b) = 30a^2b + 25ab^2$

Поделив, мы можем произвести проверку, умножив результат на делитель; в результате должно появиться делимое.

Таким же образом можно делить и *алгебраические* суммы, в которых *вычитаются* и *складываются* буквенные выражения.

$$(35x^5 + 40x^4 - 5x^2) : 5x^2 = 7x^3 + 8x^2 - 1$$

Проверка: $5x^2 (7x^3 + 8x^2 - 1) = 35x^5 + 40x^4 - 5x^2$

$$(9\,x^3y^2 - 18\,x^2y^3 + 15\,x^2y^2) : 3x^2y^2 = 3x - 6y + 5$$

Проверка: $3x^2y^2 (3x - 6y + 5) = 9x^3y^2 - 18x^2y^3 + 15x^2y^2$

Можно делить и *суммы* на *суммы*:

Пример 1:

$$\begin{array}{l} (40a^2 + 62a + 24) : (5a + 4) = 8a + 6 \\ -\underline{(40a^2 + 32a)} \\ \quad 0 \;\; + 30a \\ \qquad -\underline{(30a + 24)} \\ \qquad\quad 0 + 0 \end{array}$$

На таких примерах ученики могут освоить в общей форме все шаги письменного деления.

Вначале мы делим только первое число первой скобки на первое число второй скобки: $40a^2 : 5a = 8a$. Затем весь делитель умножается на $8a$: $8a \cdot (5a + 4) = 40a^2 + 32a$. Результат пишется под делимым и вычитается:

$$\begin{array}{l} (40a^2 + 62a + 24) : (5a + 4) = 8a + 6 \\ -\underline{(40a^2 + 32a)} \\ \quad 0 \;\; + 30a \end{array}$$

Остаток $30a + 24$; число “24”, также относящееся к остатку, стоит в первой строке.

Второе деление — это деление $30a : 5a = 6$. Затем весь делитель мы умножаем на 6: $6 \cdot (5a + 4) = 30a + 24$. Результат этого умножения мы пишем под первым остатком и заново вычитаем:

$$\begin{array}{l} (40a^2 + 62a + 24) : (5a + 4) = 8a + 6 \\ -\underline{(40a^2 + 32a)} \\ \quad 0 \;\; + 30a \\ \qquad -\underline{(30a + 24)} \\ \qquad\quad 0 + 0 \end{array}$$

После второго деления не остается никакого остатка — деление происходит нацело. Наконец, проверка:

$(8a + 6) \cdot (5a + 4) = 40a^2 + 32a + 30a + 24 = 40a^2 + 62a + 24$

Проверка дает нужный результат; умножение дает частное. На таких примерах ученики переживают противоположный характер деления и умножения.

Пример 2:

$$\begin{array}{l} (15a^2 + 47a + 28) : (3a + 7) = 5a + 4 \\ -\underline{(15a^2 + 35a)} \\ \quad\;\; 0 \;\; + 12a \end{array}$$

Чтобы получить первый остаток, необходимо предпринять *три* шага:

1. Деление $15a^2 : 3a = 5a$.
2. Умножение $5a \cdot (3a + 7) = 15a^2 + 35a$.
3. Вычитание $15a^2 + 35a$.

Остается $0 + 12a + 28$ (28 из первой строки).

Затем три вышеназванных шага следует повторить:

$$\begin{array}{l} (15a^2 + 47a + 28) : (3a + 7) = 5a \\ -\underline{(15a^2 + 35a)} \\ \quad\;\; 0 \;\; + 12a \\ \qquad\quad -\underline{(12a + 28)} \\ \qquad\qquad\;\; 0 + 0 \end{array}$$

1. Деление $12a : 3a = 4$.
2. Умножение $4 \cdot (3a + 7) = 12a + 28$
3. Вычитание $12a + 28$.

Деление выполняется без остатка.

Проверка:

$(5a + 4) \cdot (3a + 7) = 15a^2 + 35a + 12a + 28 = 15a^2 + 47a + 28$

Проверка дает правильный результат.

Пример 3:

$$\begin{array}{l} (16a^2 + 46a + 33) : (8a + 11) = 2a + 3 \\ -\underline{(16a^2 + 22a)} \\ \quad\;\; 0 \;\; + 24a \end{array}$$

$$\underline{-(24a + 33)}$$
$$0 + 0$$

Проверка:

$(2a + 3) \cdot (8a + 11) = 16a^2 + 22a + 24a + 33 = 16a^2 + 46a + 33$

Пример 4:

$$(18a^2 + 33ab + 14b^2) : (6a + 7b) = 3a + 2b$$
$$\underline{-(18a^2 + 21ab)}$$
$$0 + 12ab$$
$$\underline{-(12ab + 14b^2)}$$
$$0 + 0$$

Проверка:

$(6a + 7b) \cdot (3a + 2b) = 18a^2 + 12ab + 21ab + 14b^2 =$
$= 18a^2 + 33ab + 14b^2$

Пример 5:

$$(6a^3 + 31a^2 + 47a + 42) : (2a + 7) = 3a^2 + 5a + 6$$
$$\underline{-(6a^3 + 21a^2)}$$
$$0 + 10a^2$$
$$\underline{-(10a^2 + 35a)}$$
$$0 + 12a$$
$$\underline{-(12a + 42)}$$
$$0 + 0$$

Проверка:

$$\underline{(2a + 7) \cdot (3a^2 + 5a + 6)}$$
$$21a^2 + 35a + 45$$
$$\underline{6a^3 + 10a^2 + 12a}$$
$$6a^3 + 31a^2 + 47a + 42$$

При умножении мы пишем равные степени друг под другом, так чтобы легко было складывать. Такой порядок в точности совпадает с порядком при письменном умножении. Мы

умножаем сначала 7 · 6, затем 7 · 5*a* и т.д.

Естественно, в конце может получиться остаток:

Пример 6:

$$(27a^2 + 42a + 13) : (3a + 4) = 9a + 2. \text{ Остаток} = 5$$

$$\begin{array}{l} -\underline{(27a^2 + 36a)} \\ \quad 0 + 6a \\ \quad\quad -\underline{(6a + 8)} \\ \quad\quad\quad 0 + 5 \end{array}$$

Проверка:

$$(9a + 2) \cdot (3a + 4) = 27a^2 + 36a + 6a + 8 = 27a^2 + 42a + 8$$

Совпадает? Да, если мы приплюсуем остаток “5”.

Пример 7:

$$(12a^3 + 55a^2 + 103a + 101) : (4a + 9) = 3a^2 + 7a + 10.$$

$$\text{Остаток} = 11$$

$$\begin{array}{l} -\underline{(12a^3 + 27a^2)} \\ \quad 0 + 28a^2 \\ \quad -\underline{(28a^2 + 63a)} \\ \quad\quad 0 + 40a \\ \quad\quad -\underline{(40a + 90)} \\ \quad\quad\quad 0 + 11 \end{array}$$

Проверка:

$$\begin{array}{l} \underline{(4a + 9) \cdot (3a^2 + 7a + 10)} \\ \quad\quad\quad 27a^2 + 63a + 90 \\ 12a^3 + 28a^2 + 40a \\ \underline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 11 \text{ (остаток)}} \\ 12a^3 + 55a^2 + 103a + 101 \end{array}$$

Особенно хороши для выработки навыков такие примеры деления, при которых возникают отрицательные числа. Они требуют от учеников повышенного внимания при вычитании.

Пример 8:

$$(35a^2 + 13a - 12) : (5a + 4) = 7a - 3$$

$$\begin{array}{l} -\underline{(35a^2 + 28a)} \\ \quad 0 - 15a \\ \quad -\underline{(-15a - 12)} \end{array}$$

$$0 + 0$$

Последовательность шагов в точности такая же. В обоих вычитаниях участвуют отрицательные числа. Вспоминаем наши правила: вычесть отрицательное число — значит прибавить равное ему положительное.

Проверка:

$$(7a - 3) \cdot (5a + 4) = 35a^2 + 28a - 15a - 12 = 35a^2 + 13a - 12$$

Пример 9:

$$\begin{array}{l} (42a^2 - 41a + 5) : (6a - 5) = 7a - 1 \\ -\underline{(42a^2 - 35a)} \\ \quad 0 \;\; - 6a \\ \quad -\underline{(-6a + 5)} \\ \qquad 0 + 0 \end{array}$$

Проверка:

$$(7a - 1) \cdot (6a - 5) = 42a^2 - 35a - 6a + 5 = 42a^2 - 41a + 5$$

Пример 10:

$$\begin{array}{l} (20a^2 - 63a + 25) : (4a - 11) = 5a - 2. \qquad \text{Остаток} = 3 \\ -\underline{(20a^2 - 55a)} \\ \quad 0 \;\; - 8a \\ \quad -\underline{(-8a + 22)} \\ \qquad 0 + 3 \end{array}$$

Проверка:

$$(5a - 2) \cdot (4a - 11) = 20a^2 - 55a - 8a + 22$$

$$+ 3 \text{ (остаток)} =$$

$$= 20a^2 - 63a + 25$$

12-я группа: деление

1. $21a^3 : 7a^2 =$
2. $42a^2 : 6a^2 =$
3. $26a^3 : 13 =$
4. $72a^3b^2 : 9a^2b^2 =$
5. $85ab^3 : 5ab^2 =$
6. $90\ a^2b^3c : 15a^2b^2c =$
7. $(-8a^4) : (4a^3) =$
8. $(-15a^2b^3) : (3ab^2) =$
9. $(12a^4) : (-3a) =$
10. $(18a^2b) : (-6ab) =$
11. $(-33a^2) : (-11a) =$
12. $(-25a^2b^3) : (-5a^2b^2) =$

13. $\frac{22a^2}{33a} =$
14. $\frac{24a}{8a^3} =$
15. $\frac{28ab^2}{32a^2b} =$
16. $\frac{-14a^3}{7a} =$
17. $\frac{-30a}{35a^3} =$
18. $\frac{21a^2b^3}{28a^3b} =$
19. $\frac{24a^2}{-6a^3} =$
20. $\frac{21a^3}{-14a} =$
21. $\frac{22a^3b}{-33ab^3} =$
22. $\frac{-60a}{-15a^2} =$
23. $\frac{-72a^3}{-81a^2} =$
24. $\frac{-63a^2b^3}{-49a^2b^4} =$

25. $(12a^2 + 15a + 9) : 3 =$
26. $(14a^2 - 28a + 49) : 7 =$
27. $(45a^2 + 36a - 9) : 9 =$
28. $(35a^3 + 20a^2 + 15a) : 5a =$
29. $(18a^3 + 30a^2 + 54a) : 6a =$
30. $(28a^3 - 20a^2 - 12a) : 4a =$
31. $(24a^2b + 32ab^2) : 8ab =$
32. $(10a^4b^3+14a^2b) : 2a^2b =$
33. $(18ab^3 - 15a^2b^4) : 3ab^2 =$
34. $(75x^3y^2 + 165x^2y) : 15xy =$
35. $(34x^4-85x^3+187x^2):17x^2 =$
36. $(69y^3-115y^2-207y) : 23y =$

13-я группа
Деление суммы на сумму

Примеры с положительными числами без остатка

1. $(15a^2 + 22a + 8):(3a + 2) =$
2. $(24a^2 + 38a + 15):(6a + 5) =$
3. $(21a^2 + 62a + 16):(7a + 2) =$
4. $(8a^3 + 26a^2 + 43a + 21):(4a + 3) =$
5. $(15a^3 + 26a^2 + 38a + 12):(5a + 2) =$
6. $(44a^3 + 78a^2 + 95a + 21):(11a + 3) =$

Примеры с положительными числами с остатком

7. $(18a^2 + 39a + 23):(6a + 5) =$
8. $(40a^2 + 76a + 30):(8a + 4) =$
9. $(77a^2 + 130a + 53):(11a + 6) =$
10. $(15a^3 + 36a^2 + 24a + 27):(3a + 6) =$
11. $(18a^3 + 71a^2 + 100a + 33):(9a + 4) =$
12. $(56a^3 + 123a^2 + 83a + 49):(7a + 11) =$

Примеры с отрицательными числами без остатка

13. $(12a^2 – 32a – 35):(6a + 5) =$
14. $(18a^2 – 45a + 28):(3a – 4) =$
15. $(32a^2 + 28a – 15):(8a – 3) =$
16. $(8a^3 – 22a^2 + 27a – 18):(2a – 3) =$
17. $(15a^3 + 4a^2 – 53a – 30):(3a + 5) =$
18. $(21a^3 – 34a^2 – 48a + 16):(7a – 2) =$

Примеры с отрицательными числами с остатком

19. $(20a^2 + 17a – 22):(4a – 3) =$
20. $(27a^2 – 66a – 13):(9a + 2) =$
21. $(16a^2 – 78a + 28):(2a – 9) =$
22. $(6a^3 – 32a^2 + 53a – 27):(3a – 4) =$
23. $(21a^3 – 47a^2 – 22a + 22):(7a – 4) =$
24. $(27a^3 – 63a^2 + 6a + 37):(3a – 5) =$

8. Уравнения как область математики

Уравнения — это те же самые вычисления, только в них неизвестное число спрятано. “Решить уравнение” — это значит найти неизвестное число. Это может произойти двумя способами. Можно выучить определенные правила, на основании которых *преобразуется* данное уравнение, и в конце этих преобразований неизвестное число проявится само собой. Технику работы с этими правилами, технику преобразований, уверенность и навык вполне можно приобрести; и не только можно, но и нужно. Однако существует известная опасность, что эти преобразования превратятся в простой “аппарат”, в простые приписывание и перенос чисел. Этой опасности мы, разумеется, обязаны противодействовать, следя за тем, чтобы отдельные преобразования ученики выполняли с пониманием.

Однако есть и другой способ решать уравнения, и прежде всего самые простые: исходя из доверия к числам и к счету. Если дано уравнение

$$\frac{x}{5} = 9,$$

то по сути этим задан вопрос: какое число, будучи разделенным на 5, дает 9? Это мы знаем: такое число $x = 45$.

Или, если дано уравнение

$$x + 7 = 15,$$

то немедленных преобразований с целью выделить x не требуется, не правда ли? Само уравнение — это уже вопрос: какое число плюс 7 дает 15? И опять-таки все ясно: $x = 8$. Таким образом, многие уравнения могут быть решены, просто исходя из доверия к силам. Нужно только осознать, какой

вычислительный вопрос ставит перед нами уравнение? Возьмем пример:

$$5x = 20.$$

Какое число, умноженное на 5, дает 20? Немедленно отыскивается ответ:

$$x = 4.$$

Или

$$\frac{18}{x} = 6.$$

На что нужно разделить 18, чтобы получить 6? Естественно, на 3; $x = 3$.

Если мы осознаём вопрос, поставленный перед нами уравнением, то мы мысленно вживаемся в него и преобразуем данное уравнение не извне, а изнутри. Такая работа с уравнениями дает прекрасную возможность еще более углубить чувство числа. Мы возвращаемся к старому на новом уровне.

Трудные случаи должны, разумеется, решаться преобразованиями. Однако если вы не забываете работать первым способом, то и преобразования проделываются учениками с внутренним пониманием, а не простым жонглированием правой и левой частью. В течение года преобразование уравнений может быть доведено до уровня искусства: математик, преобразующий уравнения, по сути лепит, придавая каждый раз уравнению новую форму, открывая каждый раз все новые и новые его грани. В старших классах ученики уже в состоянии пережить прелесть таких открытий.

Классный учитель, однако, начинает с уравнений другого рода, постепенно подводя детей к преобразованиям.

На первой ступени полезно *устно* составлять с учениками уравнения, поскольку при этом на первый план выступает счет. Сперва, конечно, примеры с небольшими чис-

лами. Например, мы обращаемся к классу с такими словами: “Я задумал число. Если я прибавлю к нему 8, то я получу 17”. Слыша такой вопрос, ученики сами начинают действовать. “Итак, он прибавил 8 и получил 17, значит, задумано 9, ибо 9 + 8 = 17”. Лучше всего, если мы научаемся придумывать такие примеры сходу. Это требует известного присутствия духа, однако и ученики, чувствуя, просыпаются. Примеры с большими числами лучше записать заранее.

Мы можем дать целый ряд таких устных примеров, усложняя их от урока к уроку поначалу простым увеличением чисел.

Я задумываю число;

если я прибавлю к нему	4,	то я получу	21.	(17)
“ “ “ “	6,	“ “	31.	(25)
“ “ “ “	8,	“ “	19.	(11)
“ “ “ “	17,	“ “	31.	(14)
“ “ “ “	23,	“ “	45.	(22)
“ “ “ “	28,	“ “	53.	(25)

Совсем маленькие числа не заставят учеников даже задуматься — они просто “увидят” ответ. Когда числа возрастут (последний пример), появится мысль: “Если он прибавляет к задуманному числу 28 и получает 53, то я должен от 53 отнять 28”. Прибавление 28 должно быть отыграно назад: 53 – 28 = 25.

От задуманного числа можно и *вычитать*:

Я задумываю число;

если я вычту из него	5,	то я получу	18.	(23)
“ “ “ “	9,	“ “	12.	(21)
“ “ “ “	13,	“ “	15.	(28)
“ “ “ “	16,	“ “	21.	(37)
“ “ “ “	22,	“ “	43.	(65)
“ “ “ “	33,	“ “	59.	(92)

Чтобы найти задуманное число, нужно обратить вычитание с помощью сложения: 59 + 33 = 92.

Если уже пройдено сложение с отрицательными числами,

то они могут играть роль задумываемого числа или результата:

Я задумываю число;

если я прибавлю к нему	8,	то я получу	3.	(–5)
“ “ “ “	10,	“ “	7.	(–3)
“ “ “ “	25,	“ “	19.	(–6)
“ “ “ “	35,	“ “	0.	(–35)
“ “ “ “	7,	“ “	–2.	(–9)
“ “ “ “	15,	“ “	–14.	(–29)

Я задумываю число;

если я вычту из него	8,	то я получу	–2.	(6)
“ “ “ “	12,	“ “	–11.	(1)
“ “ “ “	14,	“ “	–6.	(8)
“ “ “ “	3,	“ “	–12.	(–9)
“ “ “ “	15,	“ “	–19.	(–4)
“ “ “ “	21,	“ “	–30.	(–9)

Можно задумывать и кратные некоторого числа или же его части. Я задумываю число. Если к утроенному задуманному я прибавлю 5, то получу 17. Здесь предстоит обратить уже *две* операции, сложение и умножение:

$$17 - 5 = 12$$

и $$12 : 3 = 4$$

Проверим, действительно ли “4” искомое число. Для этого выполним заданное вычисление:

$$3 \cdot 4 + 5 = 12 + 5 = 17$$

Получаем предписанный результат; значит, “4” — это действительно задуманное число.

Если я к учетверенному задуманному числу прибавлю 2, будет 14. (3)

Если я к удвоенному задуманному числу прибавлю 7, будет 19. (6)

Если я к упятеренному задуманному числу прибавлю 13, будет 53. (8)

$$53 - 13 = 40$$

40 : 5 = 8

Проверка: 5 · 8 + 13 = 53

Если я от утроенного задуманного числа отниму 8, будет 7. (5)

Если я от учетверенного задуманного числа отниму 7, будет 25. (8)

Если я от удвоенного задуманного числа отниму 12, будет 24. (18)

24 + 12 = 36

36 : 2 = 18

Проверка: 2 · 18 – 12 = 24

Примеры с частью:

Я задумываю число;

если я прибавлю к его половине 6, то я получу 10. (8)

“ “ “ “ 7, “ 19. (24)

“ “ “ “ 10, “ 27. (34)

27 – 10 = 17

2 · 17 = 34

Проверка: 34 : 2 + 10 = 27

Я задумываю число;

если я прибавлю к его трети 6, то я получу 10. (12)

“ “ “ “ 8, “ “ 14. (18)

“ “ “ “ 15, “ “ 25. (30)

25 – 15 = 10

3 · 10 = 30

Проверка: 30 : 3 + 15 = 25

Я задумываю число;

если я вычту из его четверти 2, то я получу 5. (28)

“ “ “ “ 3, “ “ 7. (40)

“ “ “ “ 10, “ “ 11. (84)

11 + 10 = 21

4 · 21 = 84

Проверка: 84 : 4 – 10 = 11

Естественно, не всем детям в классе одинаково легко решать такие задачи. Однако если прорешать достаточное количество примеров с маленькими числами, то даже слабые ученики начинают понимать, в чем дело. И в этом все дело. В каждом ученике брезжит понимание природы чисел, и такие несложные задачи апеллируют и развивают как раз это чувство. Развитие данного чувства должно во всяком случае предшествовать письменному решению уравнений по определенным правилам. Разумеется, ученики могут и должны сами придумывать такие примеры и ставить их перед классом.

Когда мы переходим к более трудным примерам, сама собой возникает потребность записать решение. Я задумываю число, затем увеличиваю его в 7 раз. К результату прибавляю 31 и получаю 73. Задуманное число пока неизвестно, поэтому мы называем его *неизвестным* и обозначаем символом x. Итак:

$$7x + 31 = 73$$
$$7x = 42$$
$$x = 6$$

Прежде чем мы перейдем к технологии, уместно оговорить следующее: если $7x + 31$ равно 73, то одно $7x$ на 31 меньше и равно $73 - 31 = 42$. Если 7 раз x равно 42, то просто x равно седьмой части от 42, т.е. $42 : 7 = 6 = x$. Те же самые рассуждения мы производим, решая устные задачи.

Теперь можно попробовать записать эти рассуждения на более формальном языке.

$$7x + 31 = 73 \quad | -31$$
$$7x = 42 \quad | :7$$
$$x = 6$$

За уравнением мы проводим вертикальную черту и за ней пишем, что мы делаем — в данном случае вычитаем *из обеих частей уравнения* 31. Для левой части все понятно, мы по сути обращаем сложение 31: $7x + 31 - 31 = 7x$. Результат этого действия ($7x$) мы записываем строчкой ниже. Справа нужно

выполнить вычитание 73 – 31; результат (42) также записывается строчкой ниже. Если от обеих частей вычитается 31, то они уменьшаются на одно и то же число, т.е. левая часть все равно равна правой. Далее мы проводим еще одну вертикальную черту и пишем следующее действие, а именно деление обеих частей на 7. Левая часть делится на 7 и получается $7x : 7 = 1x = x$. Правая часть делится на 7 и получается 42 : 7 = 6. Результаты мы снова пишем на строку ниже. И эта запись сама говорит нам о том, что задуманное число, наше неизвестное равно 6. Инстинктивно мы задаем себе вопрос: а правильно ли? Легко проверить: на место неизвестного x подставим известное 6 и посчитаем:

$$7 \cdot 6 + 31 \overset{?}{=} 73$$
$$42 + 31 = 73$$

В первой строке около знака равенства ставится вопросительный знак, поскольку мы пока еще не знаем, действительно ли $7 \cdot 6 + 31$ равно 73. Когда мы убедились в верности равенства, мы ставим знак ($\surd$).

Второй пример: я задумываю число; если я умножаю его на 12 и от результата отнимаю 23, то получится 61.

$$12x - 23 = 61$$

Вначале порассуждаем: если $12x - 23$ равно 61, то $12x$ равно 84. Если $12x$ равно 84, тогда просто x равно 7. Теперь запишем:

$$12x - 23 = 61 \;\Big|\; + 23$$
$$12x = 84 \;\Big|\; : 12$$
$$x = 7$$

Первым действием в левой части мы обращаем вычитание 23: $12x - 23 + 23 = 12x$; в правой части мы увеличиваем 61 на 23 и получаем 84. Чтобы найти просто x, мы делим левую и правую часть на 12. Левая часть: $12x : 12 = 1x = x$; правая часть: 84 : 12 = 7.

Проверка:

$$12 \cdot 7 - 23 \overset{?}{=} 61$$
$$84 - 23 = 61$$
$$\surd$$

Третий пример: я задумываю число; от его пятой части я отнимаю 6 и получаю 9.

$$\frac{x}{5} - 6 = 9$$

Вначале рассуждаем: $\frac{x}{5}$ должно равняться 15; 15 – 6 = 9. Просто *x* должно быть в 5 раз больше, т.е. 75.

$$\frac{x}{5} - 6 = 9 \quad \Big| + 6$$

$$\frac{x}{5} = 15 \quad \Big| \cdot 5$$

$$x = 75$$

Неизвестное находится простым обращением произведенных над ним операций (деления на 5 и вычитания 6):

$$\frac{75}{5} - 6 \overset{?}{=} 9$$
$$15 - 6 = 9$$
$$\surd$$

В предыдущих примерах неизвестное было только с одной стороны; разумеется, оно может быть с обеих сторон: я задумываю число; если я умножаю его на 5 и прибавляю 18, то получается восьмикратное задуманное число:

$$5x + 18 = 8x$$

В правой части на 3*x* больше, чем в левой части. Этот перевес на 3*x* должен равняться 18; т.е. *x* = 6. Чтобы отчетли-

во продемонстрировать этот перевес в x, разложим $8x$ на $5x + 3x$:

$$5x + 18 = 5x + 3x$$

Поскольку в правой и левой частях $5x$, значит, $3x$ равно 18.

$$18 = 3x \quad \Big| : 3$$
$$6 = x$$

(Неизвестное x может стоять в конце как справа, так и слева от знака равенства.)

Переизбыток x отчетливо виден, если от обеих частей отнять $5x$:

Левая сторона: $5x + 18 – 5x = 18$

Правая сторона: $8x – 5x = 3x$

Короче:

$$5x + 18 = 8x \quad \Big| – 5x$$
$$18 = 3x \quad \Big| : 3$$
$$6 = x$$

Теперь проверим:

$$5 \cdot 6 + 18 \overset{?}{=} 8 \cdot 6$$
$$30 + 18 = 48$$
$$48 = 48$$
$$\surd$$

Научившись работать с “переизбытком” x, мы научимся решать уравнения с пониманием.

Я задумываю число; если я умножу его на 7 и прибавлю 8, то получается столько же, сколько будет, если к утроенному неизвестному прибавить 28:

$$7x + 8 = 3x + 28$$

Слева “перевес” в $4x$; справа чистое число “28” превосходит 8 на 20. Эти два “перевеса” взаимно уравнивают друг друга:

$$4x = 20$$
$$x = 5$$

$7x$ раскладывается на $3x + 4x$, а 28 раскладывается на 20 + 8, и “переизбыток” становится особенно ясен:

$$3x + 4x + 8 = 3x + 20 + 8$$

Вычтем из обеих частей $3x$, а затем и 8:

$$\begin{array}{r|l} 7x + 8 = 3x + 28 & -3x \\ 4x + 8 = +28 & -8 \\ 4x = +20 & :4 \\ x = 5 & \end{array}$$

Этот последний способ решения уравнений назовем *преобразованием* уравнений; в конце концов он должен превратиться в навык! После целого ряда упражнений мы перестаем особенно думать. В этом недостаток навыка — но одновременно и достоинство: сила мышления свободна теперь для другого — может быть, чего-то более существенного.

Недостатки же можно попытаться сгладить, снова и снова тренируя оценку и уравнивание.

$$5x + 56 = 7x + 40$$

Сравним числа справа и слева: на правой стороне переизбыток в $2x$, в левой стороне — в 16. Итак:

$$16 = 2x$$
$$8 = x$$

Решение вычитанием:

$$\begin{array}{r|l} 5x + 56 = 7x + 40 & -5x \\ 56 = 2x + 40 & -40 \\ 16 = 2x & :2 \\ 8 = x & \end{array}$$

Второе вычитание может быть и первым:

$$\begin{array}{r|l} 5x + 56 = 7x + 40 & -40 \\ 5x + 16 = 7x & -5x \\ 16 = 2x & :2 \\ 8 = x & \end{array}$$

Проверка:

$$5 \cdot 8 + 56 \overset{?}{=} 7 \cdot 8 + 40$$
$$40 + 56 = 56 + 40$$
$$96 = 96$$
$$\surd$$

Я задумываю число; если я удесятерю его и вычту из результата 9, я получу столько же, сколько даст умножение неизвестного на 6 и прибавление к результату 27.

$$10x - 9 = 6x + 27$$

Перевес? С левой стороны $4x$. А с правой? На сколько 27 больше, чем –9? На сколько нужно увеличить –9, чтобы получить 27? На 36. Итак,

$$4x = 36$$
$$x = 9$$

Решение с помощью обратных действий:

$$\begin{array}{r|l} 10x - 9 = 6x + 27 & -6x \\ 4x - 9 = 27 & +9 \\ 4x = 36 & :4 \\ x = 9 & \end{array}$$

Я задумываю число; если я умножу его на 8 и вычту 30, то я получу столько же, как если бы я из упятеренного числа вычел 12.

$$8x - 30 = 5x - 12$$

Перевес: x больше на левой стороне на $3x$. А справа? Какое из “чистых” чисел больше? Число “–12” больше, чем “–30”. С уровня –30 мы должны подняться до –12 на 18; идеально работает представление о термометре. Итак, перевес в 18 на правой стороне:

$$3x = 18$$
$$x = 6$$

Решение через обратные операции:

$$8x - 30 = 5x - 12 \quad \Big| -5x$$
$$3x - 30 = -12 \quad \Big| +30$$
$$3x = 18 \quad \Big| :3$$
$$x = 6$$

Проверка:

$$8 \cdot 6 - 30 = (?)\ 5 \cdot 6 - 12$$
$$48 - 30 \overset{?}{=} 30 - 12$$
$$18 = 18$$
$$\surd$$

Предыдущие примеры были построены таким образом, чтобы в ответе получались целые положительные числа. Пусть ученики решат достаточное количество таких примеров и приобретут определенную уверенность. Отрицательных чисел и дробей поначалу будем избегать, чтобы не усложнять дело посторонними трудностями.

Если справа или слева возникает несколько чисел или одночленов, то можно собрать их вместе.

$$18 + 5x + 17 = 2x + 3 + 11x \quad \Big| \text{(приведем подобные)}$$
$$35 + 5x = 13x + 3 \quad \Big| -5x$$
$$35 = 8x + 3 \quad \Big| -3$$
$$32 = 8x \quad \Big| :8$$
$$4 = x$$

Проверка:

$$18 + 20 + 17 = 8 + 3 + 44$$
$$55 \overset{?}{=} 55$$
$$\surd$$

$$63 + 4x - 21 = 15x + 28 - 4x \quad \Big| \text{(приведем подобные)}$$
$$42 + 4x = 11x + 28 \quad \Big| -4x$$
$$42 = 7x + 28 \quad \Big| -28$$
$$14 = 7x \quad \Big| :7$$
$$2 = x$$

Проверка:

$$63 + 8 - 21 \stackrel{?}{=} 30 + 28 - 8$$

$$50 = 50 \quad \surd$$

Примечание. Уравнения, которые мы рассматривали, называются *определенными* уравнениями, поскольку в ответе они определяют *одно* определенное число.

Есть и такие выражения, в которые можно, не нарушая равенства, подставить *любое* число. Например:

$$5(x + 7) = 5x + 35$$

По сути здесь по известному нам правилу число умножается на сумму. Вместо x можно подставить любое число, правило от этого не перестанет быть правилом. То же самое происходит с биноминальными формулами:

$$(x + 1)^2 \equiv x^2 + 2x + 1$$

Правая сторона всегда равна левой, какое бы число мы ни подставили. Такие примеры называются *тождествами*, обе стороны в них всегда тождественны (для любого, а не какого-то определенного числа). Этот факт иногда фиксируется определенным знаком — знаком “тождества”:

$$(x + 1)^2 \equiv x^2 + 2x + 1$$

И наконец, есть третий сорт “уравнений”:

$$5x + 2 = 5x$$

Такое уравнение *противоречиво*, поскольку нет такого x, для которого данное выражение превращалось бы в равенство; $5x + 2$ всегда больше, чем $5x$. Мы должны написать:

$$5x + 2 > 5x$$

Знак $>$ читается как “*больше чем*”. Такое выражение называется *неравенством*. В данном случае вместо x можно подставить любое число, и неравенство всегда будет выполняться.

Итак, далеко не всегда мы имеем дело с определенным уравнением. Мы можем встретиться и с тождеством, и с неравенством.

Упражнения: уравнения, решаемые в положительных целых числах

1. $5x + 6 = 3x + 14$
2. $7x + 11 = 2x + 21$
3. $9x + 2 = 7x + 12$
4. $3x + 21 = x + 39$
5. $10x + 14 = 3x + 21$
6. $15x + 11 = 9x + 53$
7. $2x + 3 + 8x = 3x + 18 + 4x$
8. $5x + 17 + 3x = 2x + 35 + 3x$
9. $7x + 21 + 2x = 5x + 41 + 2x$
10. $13 + 4x + 17 = 21 + 3x + 15$
11. $7 + 5x + 16 = 3 + 2x + 29$
12. $2x + 5 + 8x = 7 + 6x + 14$

13. $3x – 2 = x + 8$
14. $5x – 6 = 2x + 15$
15. $6x – 11 = 2x + 21$
16. $8x – 24 = 5x + 9$
17. $9x – 4 = 2x + 10$
18. $21x – 14 = 15x + 16$
19. $15x + 3 – 6x = 16x + 7 –9x$
20. $21x + 6 – 17x = 15x + 16 – 13x$
21. $32x + 11 –28x = 17x + 22 –14x$
22. $18 + 13x – 7 = 25 + 10x – 2$
23. $31 + 17x – 21 = 16 + 14x + 12$
24. $25 + 24x – 21 = 17x + 40 + 3x$

25. $5x – 3 = 7x – 7$
26. $11x – 21 = 18x – 49$
27. $13x – 15 = 15x – 29$
28. $15x – 3 = 20x – 58$
29. $5x – 6 = 18 – 3x$
30. $8x – 10 = 90 – 12x$
31. $14x + 7 – 11x = 6x – 35 + 18x$
32. $21x – 9 – 5x = 2x + 21 + 8x$
33. $42x – 18 – 36x = 21x – 114 + 9x$
34. $15x + 21 –7x = 13 + 6x + 32$
35. $13x – 12 + 5x = 7x + 48 – 9x$
36. $7x – 8 + 2x = 8x + 32 – 9x$

37. $2x – 7 = 9x – 35$
38. $11x – 21 = 9 – 4x$
39. $7x + 6 = 3x + 26$
40. $18x + 5 = 12x + 11$
41. $9x + 11 = 5x + 23$
42. $6x + 58 = 13x + 9$
43. $3x + 7 + 8x = 11 + 5x + 8$
44. $5x + 70 –2x = 11 + 8x + 44$
45. $21x + 7 –15x = 8x + 15 –4x$
46. $8 + 14x + 6 = 3x + 34 + 9x$
47. $40 + 7x – 15 = 8x + 35 – 3x$
48. $100 + 17x – 45 = 8x + 59 + 7x$

9. Уравнения с дробями

Уже самые простые уравнения приводят к *дробным решениям*:

$$7x + 10 = 4x + 11 \quad \Big| -4x$$
$$3x + 10 = 11 \quad \Big| -10$$
$$3x = 1$$

Последнее уравнение ставит перед нами вопрос: какое число, будучи умножено на 3, дает 1? Это по сути основной вопрос, приводящий к дробям. Целое требуется не умножать, а делить! В результате вводится понятие $^1/_3$: это такое число, которое при умножении на 3 дает 1. Если возникает вопрос: что такое $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$... ? — ответ следующий: это такие числа, которые при умножении на два, три, четыре... дают 1. Итак, предыдущее уравнение имеет решение:

$$x = \frac{1}{3}$$

А что такое $^2/_3$? Естественно, $^2/_3 = {}^1/_3 + {}^1/_3$. Если эту дробь взять трижды, то в ответе получится две целых, или 2. Так можно понять смысл всякой дроби: $^3/_5$— это такое число, которое, будучи взято 5 раз (умножено на 5), дает 3. Оно является решением уравнения:

$$5x = 3$$

$$x = \frac{3}{5}$$

Если мы работаем с уравнениями в целых числах, то рано или поздно нам встретится уравнение типа:

$$ax = b,$$

причем a и b — целые числа. Оно эквивалентно вопросу: какое число дает b, будучи умножено на a? Это дробь $^b/_a$.

Снова лучше прояснить для себя решение, сначала обратившись к смыслу дроби и только затем перейдя к преобразованиям. Они состоят в данном случае в том, чтобы делить обе части уравнения на *a*.

$$ax = b \quad \Big| : a$$

Левая сторона при делении на *a* дает $1x = x$.

Правая сторона при делении на *a* дает $b : a = \frac{b}{a}$

Примеры уравнений с дробными решениями:

Пример 1:

$$8x + 4 = 3x + 5 \quad \Big| - 3x$$
$$5x + 4 = 5 \quad \Big| - 4$$
$$5x = 1 \quad \Big| : 5$$
$$x = \frac{1}{5}$$

Проверка дает хороший повод повторить операции с дробями: в первое уравнение вместо *x* мы подставляем дробь $^1/_5$:

$$8 \cdot \frac{1}{5} + 4 \overset{?}{=} 3 \cdot \frac{1}{5} + 5$$
$$\frac{8}{5} + 4 \overset{?}{=} \frac{3}{5} + 5$$
$$1\frac{3}{5} + 4 \overset{?}{=} 5\frac{3}{5}$$
$$5\frac{3}{5} = 5\frac{3}{5} \quad \surd$$

Пример 2:

$$9x - 3 = 5x + 2 \quad \Big| - 5x$$
$$4x - 3 = 2 \quad \Big| + 3$$
$$4x = 5 \quad \Big| : 4$$
$$x = \frac{5}{4}$$

Проверка:

$$9 \cdot \frac{5}{4} - 3 \overset{?}{=} 5 \cdot \frac{5}{4} + 2$$

$$\frac{45}{4} - 3 \overset{?}{=} \frac{25}{4} + 2$$

$$11^1/_4 - 3 \overset{?}{=} 6^1/_4 + 2$$

$$8^1/_4 = 8^1/_4$$

√

На самом деле знак вопроса должен стоять над каждым уравнением, кроме последнего; ведь только в последней строчке становится очевидно, что найденное число действительно уравнивает обе стороны.

Пример 3:

$$\begin{aligned} 10x - 11 &= 3x - 2 && \big| -3x \\ 7x - 11 &= -2 && \big| +11 \\ 7x &= 9 && \big| :7 \\ x &= \frac{9}{7} \end{aligned}$$

Проверка:

$$10 \cdot \frac{9}{7} - 11 \overset{?}{=} 3 \cdot \frac{9}{7} - 2$$

$$\frac{90}{7} - 11 \overset{?}{=} \frac{27}{7} - 2$$

$$12^6/_7 - 11 \overset{?}{=} 3^6/_7 - 2$$

$$1^6/_7 = 1^6/_7$$

√

Конечно, результат $x = {}^9/_7$ также можно записать в виде смешанной дроби: $x = 1^2/_7$. Если подставить эту дробь в первую строку:

$$10 \cdot 1^2/_7 - 11 \overset{?}{=} 3 \cdot 1^2/_7 - 2$$
$$10^{20}/_7 - 11 \overset{?}{=} 3^6/_7 - 2$$
$$12^6/_7 - 11 \overset{?}{=} 1^6/_7$$
$$1^6/_7 = 1^6/_7$$

√

В первом случае проверку даже легче произвести, чем во втором, со смешанным ответом. Однако полезно поупражнять и то и другое.

А как решать уравнения, если дроби присутствуют уже в условии?

Пример 4:

$$x + \frac{3}{4} = 6$$

Какое число плюс $^3/_4$ дает 6? С 6 спустимся на $^3/_4$ назад: $6 - {}^3/_4 = 5^1/_4$. Преобразовывая уравнение, получаем:

$$x + \frac{3}{4} = 6 \quad \Big| -\frac{3}{4}$$
$$x = 5^1/_4$$

Пример 5:

$$x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \quad \Big| -\frac{2}{3}$$

$$x = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \quad \Big|$$ (приводим к общему знамнателю)

$$x = \frac{9}{12} - \frac{8}{12}$$

$$x = \frac{1}{12}$$

Проверка:

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{3} \overset{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{8}{12} \overset{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

√

Пример 6:

$$2x - \frac{3}{5} = 1 \qquad \Big| + \frac{3}{5}$$

$$2x = 1 + \frac{3}{5}$$

$$2x = \frac{8}{5} \qquad \Big| : 2$$

$$x = \frac{4}{5}$$

Проверка:

$$2 \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \overset{?}{=} 1$$

$$\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \overset{?}{=} 1$$

$$\frac{5}{5} = 1$$

√

Пример 7:

$$3x - \frac{1}{4} = 1 \qquad \Big| + \frac{1}{4}$$

$$3x = 1 + \frac{1}{4}$$

$$3x = \frac{5}{4} \qquad \Big| : 3$$

$$x = \frac{5}{12}$$

Проверка:

$$3 \cdot \frac{5}{12} - \frac{1}{4} \overset{?}{=} 1$$

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1$$

$$\surd$$

Как вычислить $3 \cdot {}^{5}/_{12}$? Мы можем умножить на 3 числитель и затем сократить на 3: $3 \cdot {}^{5}/_{12} = {}^{15}/_{12} = {}^{5}/_{4}$. Однако проще *перед умножением* сократить 3 и 12.

Пример 8:

$$5x + \frac{2}{3} = 3x + \frac{4}{5} \qquad \Big| - 3x$$

$$2x + \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \qquad \Big| - \frac{2}{3}$$

$$2x = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \qquad \Big|$$ (приведем к общему знамнателю)

$$2x = \frac{12}{15} - \frac{10}{15}$$

$$2x = \frac{2}{15} \qquad \Big| : 2$$

$$x = \frac{1}{15}$$

Проверка:

$$5 \cdot \frac{1}{15} + \frac{2}{3} \overset{?}{=} 3 \cdot \frac{1}{15} + \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \overset{?}{=} \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$$

$$1 = 1$$

√

Такие уравнения предоставляют прекрасную возможность для повторения дробей.

Пример 9:

$$5x - \frac{3}{4} = 3x + \frac{1}{5} \qquad \Big| -3x$$

$$2x - \frac{3}{4} = \frac{1}{5} \qquad \Big| +\frac{3}{4}$$

$$2x = \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \qquad \Big| \text{(к общему знаменателю)}$$

$$2x = \frac{4}{20} + \frac{15}{20}$$

$$2x = \frac{19}{20} \qquad \Big| : 2$$

$$x = \frac{19}{40}$$

Проверка:

$$5 \cdot \frac{19}{40} - \frac{3}{4} \overset{?}{=} 3 \cdot \frac{19}{40} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{19}{8} - \frac{6}{8} \overset{?}{=} \frac{57}{40} + \frac{8}{40}$$

$$\frac{13}{8} = \frac{65}{40}$$

$$\frac{13}{8} = \frac{13}{8}$$

$$\surd$$

В уравнении могут возникать и дробные части неизвестного:

Пример 10:

$$\frac{x}{3} + 2 = 6$$

Чтобы преобразования не проходили чисто механически, снова порассуждаем: $\frac{x}{3}$ должно равняться 4, поскольку 4 + 2 = 6; *x* должно равняться 12, поскольку 12 : 3 = 4.

Теперь — решение с помощью преобразований:

$$\frac{x}{3} + 2 = 6 \quad \Big| -2$$

$$\frac{x}{3} = 4 \quad \Big| \cdot 3$$

$$x = 12$$

Пример 11:

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \Big| +\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \quad \Big| \text{(к общему знаменателю)}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{3}{4} \quad \Big| \cdot 3$$

$$x = \frac{9}{4}$$

Проверка:

$$\frac{\frac{9}{4}}{3} - \frac{1}{2} \overset{?}{=} \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \overset{?}{=} \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$\frac{\frac{9}{4}}{3}$ = ? Такую дробь мы называем *двойной*.

Ее смысл: $\frac{9}{4} : 3 = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

Пример 12:

$$\frac{3x}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{2} \qquad \Big| + \frac{2}{5}$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \qquad \Big| \text{(к общему знаменателю)}$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10}$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{9}{10} \qquad \Big| : 3$$

$$\frac{x}{2} = \frac{3}{10} \qquad \Big| \cdot 2$$

$$x = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Проверка:

$$\frac{3 \cdot \frac{3}{5}}{2} - \frac{2}{5} \overset{?}{=} \frac{1}{2}$$

Не нужно пугаться таких монстров. Двинемся смело вперед: $3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$.

Итак: $\frac{\frac{9}{5}}{2} - \frac{2}{5} \overset{?}{=} \frac{1}{2}$

Следующее соображение: $\frac{\frac{9}{5}}{2} = \frac{9}{5} : 2 = \frac{9}{10}$, поскольку, когда дробь делится на целое число, числитель (если он есть) делится на это число, или на число умножается знаменатель.

Итак:

$$\frac{9}{10} - \frac{2}{5} \overset{?}{=} \frac{1}{2}$$

$$\frac{9}{10} - \frac{4}{10} \overset{?}{=} \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Проверка дает возможность преодолеть робость в вычислениях с дробями и смело, со спокойной головой применить правила. С удовольствием обнаруживается, что проверка дает верный результат. Мы чувствуем подтверждение своим действиям.

Далее следуют уравнения с дробями, ведущие к целочисленным решениям.

Пример 13:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 14 \quad \Big| \text{ (к общему знаменателю)}$$

$$\frac{4x}{12} + \frac{3x}{12} = 14$$

$$\frac{7x}{12} = 14 \quad \Big| : 7$$

$$\frac{x}{12} = 2 \quad \Big| \cdot 12$$

$$x = 24$$

Проверка:

$$\frac{24}{3} + \frac{24}{4} \overset{?}{=} 14$$

$$8 + 6 = 14$$

√

Пример 14:

$$\frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} = 17 \quad \Big|$$ (к общему знаменателю)

$$\frac{8x}{12} + \frac{9x}{12} = 17 \quad \Big|$$ (к общему знаменателю)

$$\frac{17x}{12} = 17 \quad \Big| : 17$$

$$\frac{x}{12} = 1 \quad \Big| \cdot 12$$

$$x = 12$$

Проверка:

$$\frac{2 \cdot 12}{3} + \frac{3 \cdot 12}{4} \overset{?}{=} 17$$

$$8 + 9 = 17$$

√

Пример 15:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+4}{3} = 6 \quad \Big| \text{ (к общему знаменателю)}$$

$$\frac{3x+3}{6} + \frac{2x+8}{6} = 6$$

$$\frac{5x+11}{6} = 6 \quad \Big| \cdot 6$$

$$5x + 11 = 36 \quad \Big| -11$$

$$5x = 25 \quad \Big| : 5$$

$$x = 5$$

Проверка:

$$\frac{5+1}{2} + \frac{5+4}{3} \overset{?}{=} 6$$

$$\frac{6}{2} + \frac{9}{3} = 6$$

$$3 + 3 = 6$$

√

В обеих частях первой строки стоит по сумме: при расширении домножается каждое слагаемое:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{3\cdot(x+1)}{3\cdot 2} = \frac{3x+3}{6}$$

$$\frac{x+4}{3} = \frac{2\cdot(x+4)}{2\cdot 3} = \frac{2x+8}{6}$$

Пример 16:

$$\frac{2x+5}{5} + \frac{3x-7}{2} = 7 \quad \Big| \text{ (к общему знаменателю)}$$

$$\frac{4x+10}{10} + \frac{15x-35}{10} = 7$$

$$\frac{19x-25}{10}=7 \quad \Big| \cdot 10$$

$$19x - 25 = 70 \quad \Big| + 25$$

$$19x = 95 \quad \Big| : 19$$

$$x = 5$$

Проверка:

$$\frac{2\cdot 5+5}{5}+\frac{3\cdot 5-7}{2} \overset{?}{=} 7$$

$$\frac{15}{5}+\frac{8}{2} \overset{?}{=} 7$$

$$3 + 4 = 7$$

√

Пример 17:

$$\frac{5x+9}{4}-\frac{7x+3}{6}=2 \quad \Big| \text{ (к общему знаменателю)}$$

$$\frac{15x+27}{12}-\frac{14x+6}{12}=2$$

$$\frac{x+21}{12}=2 \quad \Big| \cdot 12$$

$$x + 21 = 24 \quad \Big| -21$$

$$x = 3$$

Проверка:

$$\frac{5\cdot 3+9}{4}-\frac{7\cdot 3+3}{6} \overset{?}{=} 2$$

$$\frac{24}{4}-\frac{26}{6} = 2$$

$$6 - 4 = 2$$

√

При сложении дробей (переходе от второй к третьей стро-

ке) надо иметь в виду, что следует вычитать *каждое* слагаемое второго числителя. Дробная черта имеет то же действие, что и скобки: знак вычитания перед дробной чертой действует на *оба* слагаемых.

Пример 18:

$$\frac{3x-6}{2}-\frac{2x+3}{3}=1$$

$$\frac{9x-18}{6}-\frac{4x+6}{6}=1$$

$$\frac{5x-24}{6}=1 \quad \Big| \cdot 6$$

$$5x-24=6 \quad \Big| +24$$

$$5x=30 \quad \Big| :5$$

$$x=6$$

Проверка:

$$\frac{3\cdot 6-6}{2}-\frac{2\cdot 6+3}{3}\overset{?}{=}1$$

$$\frac{12}{2}-\frac{15}{3}\overset{?}{=}1$$

$$6-5=1$$

√

В следующем примере в числителе вычитаемой дроби стоит *разность*. При сложении приведенных к общему знаменателю дробей мы должны быть особенно внимательны: каждая часть второго числителя должна вычитаться!

Пример 19:

$$\frac{2x+1}{5}-\frac{x-3}{4}=2$$

$$\frac{8x+4}{20}-\frac{5x-15}{20}=2$$

$$\frac{8x+4-(5x-15)}{20} = 2$$

$$\frac{3x+19}{20} = 2 \quad \Big| \cdot 20$$

$$3x + 19 = 40 \quad \Big| -19$$

$$3x = 21 \quad \Big| : 3$$

$$x = 7$$

Проверка:

$$\frac{2\cdot 7+1}{5} - \frac{7-3}{4} \overset{?}{=} 2$$

$$\frac{15}{5} - \frac{4}{4} \overset{?}{=} 2$$

$$3 - 1 = 2$$

√

На что нужно особенно обратить внимание? На то, что второе число второго числителя (–15) также должно быть вычтено: 4 – (–15) = 19. Это место, чреватое ошибками.

Пример 20:

$$\frac{11x-1}{2} - \frac{7x-2}{5} = 4$$

$$\frac{55x-5}{10} - \frac{14x-4}{10} = 4$$

$$\frac{55x-5-(14x-4)}{10} = 4$$

$$\frac{41x-1}{10} = 4 \quad \Big| \cdot 10$$

$$41x - 1 = 40 \quad \Big| +1$$

$$41x = 41 \quad \Big| : 41$$

$$x = 1$$

Проверка:

$$\frac{11\cdot 1-1}{2} - \frac{7-2}{5} \overset{?}{=} 4$$

$$\frac{10}{2} - \frac{5}{5} = 4$$

$$5 - 1 = 4 \quad \surd$$

Особо трудное место:

$$-5 - (-4) = -1$$

Все приведенные примеры могут быть решены и более коротким путем: нужно умножать уравнения до тех пор, пока не пропадут все знаменатели. Тогда уже во второй строке исчезнут все дроби. Если дело только в том, чтобы вычислить *x*, тогда второй путь представляется, без сомнения, самым оправданным. Однако если мы решаем уравнения с классом, тогда важнее несколько другой вопрос: чему учатся ученики во время решения уравнения? Когда они решают уравнения предложенным нами способом, они учатся гибко владеть аппаратом дробей. И это уже достижение! Если преобразования научили их уверенности и легкости в работе с дробями, тогда мы можем и должны показать им другой способ. Он элегантней, однако легко превращается в алгоритм. Продемонстрируем его на уже решенных примерах.

Пример 4:

$$x + \frac{3}{4} = 6$$

Умножение уравнения на 4 приводит к превращению дроби $^3/_4$ в целое число 3. Однако не только дробь — *каждый* член уравнения нужно при этом умножить на 4.

$$x + \frac{3}{4} = 6 \quad \Big| \cdot 4$$

$$4x + 3 = 24 \quad \Big| -3$$

$$4x = 21 \quad \Big| : 4$$

$$x = 5^1/_4$$

Проверка:

$$5^1/_4 + \frac{3}{4} = 6$$

√

Пример 5:

$$x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$$

Общий знаменатель — 12. Мы можем вместо приведения к нему умножить уравнение на 12, и в результате дробные части пропадут.

$$x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \qquad \Big| \cdot 12$$

$$12x + 12 \cdot \frac{2}{3} = 12 \cdot \frac{3}{4}$$

$$12x + 8 = 9 \qquad \Big| -8$$

$$12x = 1 \qquad \Big| : 12$$

$$x = \frac{1}{12}$$

Проверка:

$$\frac{1}{12} + \frac{2}{3} \overset{?}{=} \frac{3}{4}$$

$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

√

Как умножать дробь на целое число, например $12 \cdot \frac{2}{3}$ или $12 \cdot \frac{3}{4}$? Множитель “12” можно сразу же сократить со знаменателем (3 и 4). Это облегчает счет:

Пример 8:

$$5x + \frac{2}{3} = 3x + \frac{4}{5} \qquad \Big| \cdot 15$$

$$15 \cdot 5x + 15 \cdot \frac{2}{3} = 15 \cdot 3x + 15 \cdot \frac{4}{5}$$

$$75x + 10 = 45x + 12 \qquad \Big| -45x - 10$$

$$30x = 2 \qquad \Big| : 30$$

$$x = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Проверка:

$$5 \cdot \frac{1}{15} + \frac{2}{3} \overset{?}{=} 3 \cdot \frac{1}{15} + \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$$

$$1 = 1$$

√

Пример 9:

$$5x - \frac{3}{4} = 3x + \frac{1}{5} \qquad \Big| \cdot 20$$

$$20 \cdot 5x - 20 \cdot \frac{3}{4} = 20 \cdot 3x + 20 \cdot \frac{1}{5}$$

$$100x - 15 = 60x + 4 \qquad \Big| - 60x + 15$$

$$40x = 19 \qquad \Big| : 40$$

$$x = \frac{19}{40}$$

Проверка излишня, мы ее проделали уже 2 раза.

Пример 10:

$$\frac{x}{3} + 2 = 6 \qquad \Big| \cdot 3$$

$$x + 6 = 18 \qquad \Big| -6$$

$$x = 12$$

После некоторых упражнений мы перестаем писать перед каждым членом множитель “3”. *Мы просто представляем себе*, что всякий член уравнения умножается на 3. В следующей строке мы записываем результат умножения и обнаруживаем, что дроби исчезли.

Пример 11:

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad \Big| \cdot 12$$

Каждая дробь должна быть умножена на 12. Мысленно сокращаем 12 на знаменатели и получаем 4, 6 и 3.

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad \Big| \cdot 12$$

$$4x - 6 = 3 \qquad \Big| + 6$$

$$4x = 9 \qquad \Big| : 4$$

$$x = \frac{9}{4}$$

Имеет смысл до той поры заниматься устным умножением и сокращением, пока ученики не научатся “видеть” результат. Только так мы извлечем все выгоды данного метода. Поскольку на этом пути во второй строке пропадают знаменатели, метод называется *исключение знаменателей*.

Пример 12:

$$\frac{3x}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{2} \qquad \Big| \cdot 10$$

(Представляем себе: $^{10}/_{2} = 5$, $^{10}/_{5} = 2$, $^{10}/_{2} = 5$; итак, первый числитель умножается на 5, второй на 2 и третий снова на 5.)

$$\frac{3x}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{2} \qquad \Big| \cdot 10$$

$$15x - 4 = 5 \qquad \Big| + 4$$

$$15x = 9 \qquad \Big| : 5$$

$$x = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Проверку мы и далее опускаем.

Пример 13:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 14 \qquad \Big| \cdot 12$$

(Мысленно: первый числитель домножить на 4, второй — на 3.)

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 14 \qquad \Big| \cdot 12$$

$$4x + 3x = 12 \cdot 14$$

$$7x = 12 \cdot 14 \qquad \Big| : 7$$

$$x = 12 \cdot 2$$

$$x = 24$$

Конечно, можно сразу вычислить 12 · 14 (168). Однако легче делить на 7 12 · 14, чем 168. При этом мы используем правило: чтобы разделить произведение, нужно разделить *только один из сомножителей*. А 14 легко делится на 7.

Пример 14:

$$\frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} = 17 \qquad \Big| \cdot 12$$

$$8x + 9x = 12 \cdot 17$$

$$17x = 12 \cdot 17 \qquad \Big| : 17$$

$$x = 12$$

Пример 15:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+4}{3} = 6 \qquad \Big| \cdot 6$$

Мысленно снова представим себе, на что умножать числители (3 и 2). Дробная черта снова действует как скобка: *оба* слагаемых должны быть умножены:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+4}{3} = 6 \qquad \Big| \cdot 6$$

$$3x + 3 + 2x + 8 = 36$$

$$5x + 11 = 36 \qquad \Big| - 11$$

$$5x = 25 \qquad \Big| : 5$$

$$x = 5$$

Пример 16:

$$\frac{2x+5}{5} + \frac{3x-7}{2} = 7 \quad \Big| \cdot 10$$

$$4x + 10 + 15x - 35 = 70$$

$$19x - 25 = 70 \quad \Big| + 25$$

$$19x = 95 \quad \Big| : 19$$

$$x = 5$$

Пример 17:

$$\frac{5x+9}{4} - \frac{7x+3}{6} = 2 \quad \Big| \cdot 12$$

$$3 \cdot (5x + 9) - 2 \cdot (7x + 3) = 24$$

$$15x + 27 - 14x - 6 = 24$$

$$x + 21 = 24 \quad \Big| - 21$$

$$x = 3$$

Осторожности ради мы заключаем числители в скобки, чтобы не забыть умножить *оба* слагаемых, а затем вычесть *два* произведения.

Пример 18:

$$\frac{3x-6}{2} - \frac{2x+3}{3} = 1 \quad \Big| \cdot 6$$

$$3 \cdot (3x - 6) - 2 \cdot (2x + 3) = 6$$

$$9x - 18 - 4x - 6 = 6$$

$$5x - 24 = 6 \quad \Big| + 24$$

$$5x = 30 \quad \Big| : 5$$

$$x = 6$$

Пример 19:

$$\frac{2x+1}{5} - \frac{x-3}{4} = 2 \quad \Big| \cdot 20$$

$$4 \cdot (2x + 1) - 5 \cdot (x - 3) = 40$$
$$8x + 4 - 5x + 15 = 40$$
$$3x + 19 = 40 \quad \Big| -19$$
$$3x = 21 \quad \Big| :3$$
$$x = 7$$

Пример 20:

$$\frac{11x - 1}{2} - \frac{7x - 2}{5} = 4 \quad \Big| \cdot 10$$
$$5 \cdot (11x - 1) - 2 \cdot (7x - 2) = 40$$
$$55x - 5 - 14x + 4 = 40$$
$$41x - 1 = 40 \quad \Big| +1$$
$$41x = 41 \quad \Big| :41$$
$$x = 1$$

В завершение несколько примеров на исключение знаменателей, которые мы еще не решали.

Пример 21:

$$\frac{2x}{3} + \frac{5}{12} = \frac{5x}{6} + \frac{1}{4} \quad \Big| \cdot 12$$
$$8x + 5 = 10x + 3 \quad \Big| -8x - 3$$
$$2 = 2x \quad \Big| :2$$
$$1 = x$$

Проверка:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{12} \overset{?}{=} \frac{5}{6} + \frac{1}{4}$$
$$\frac{8}{12} + \frac{5}{12} = \frac{10}{12} + \frac{3}{12}$$
$$\frac{13}{12} = \frac{13}{12}$$
$$\surd$$

Пример 22:

$$\frac{x}{5}+\frac{3x}{2}=\frac{x-2}{4}+15 \qquad \Big| \cdot 20$$

$$4x + 30x = 5x - 10 + 300$$

$$34x = 5x + 290 \qquad \Big| -5x$$

$$29x = 290 \qquad \Big| : 29$$

$$x = 10$$

Проверка:

$$\frac{10}{5}+\frac{30}{2} \overset{?}{=} \frac{8}{4}+15$$

$$2 + 15 = 2 + 15$$

√

Пример 23:

$$\frac{2x+7}{3}+\frac{3x-5}{4}=\frac{3x+1}{2} \qquad \Big| \cdot 12$$

$$4 \cdot (2x + 7) + 3 \cdot (3x - 5) = 6 \cdot (3x + 1)$$

$$8x + 28 + 9x - 15 = 18x + 6$$

$$17x + 13 = 18x + 6 \qquad \Big| -17x - 6$$

$$7 = x$$

Проверка:

$$\frac{2\cdot 7+7}{3}+\frac{3\cdot 7-5}{4} \overset{?}{=} \frac{3\cdot 7+1}{2}$$

$$\frac{21}{3}+\frac{16}{4}=\frac{22}{2}$$

$$7 + 4 = 11$$

√

Пример 24:

$$\frac{3x-2}{5}-\frac{x-1}{3}=\frac{x+2}{6} \qquad \Big| \cdot 30$$

$$6 \cdot (3x - 2) - 10 \cdot (x - 1) = 5 \cdot (x + 2)$$

$$18x - 12 - 10x + 10 = 5x + 10$$

$$8x - 2 = 5x + 10 \qquad \Big| -5x + 10$$

$$3x = 12 \qquad \Big| : 3$$

$$x = 4$$

Проверка:

$$\frac{3\cdot 4-2}{5}-\frac{4-1}{3}\overset{?}{=}\frac{4+2}{6}$$

$$\frac{10}{5}-\frac{3}{3}=\frac{6}{6}$$

$$2-1=1$$

√

Задачи к главе 9

1. Уравнения с целочисленными коэффициентами, дающие дробные решения

1. $5x + 3 = 2x + 10$
2. $6x + 5 = 4x + 16$
3. $8x + 4 = 3x + 8$
4. $11x + 1 = 5x + 2$
5. $10x + 3 = 3x + 7$
6. $8x + 11 = 3x + 12$
7. $9x + 3 = 5x + 6$
8. $10x + 8 = 7x + 10$
9. $13x + 5 = 9x + 6$
10. $12x + 3 = 4x + 6$

11. $2x + 7 = 5x + 3$
12. $5x – 3 = 2x + 4$
13. $31x – 17 = 28x + 3$
14. $8x – 9 = 3x + 2$
15. $13x – 2 = 7x + 1$
16. $24x – 6 = 20x + 1$
17. $5x – 7 = 1 – 2x$
18. $3x – 1 = 7 – 2x$
19. $3x – 5 = 2 – 5x$
20. $4x – 2 = 4 – 5x$

2. Уравнения с дробными коэффициентами, дающие целочисленные решения

1. $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=6$
2. $\frac{3x}{2}+\frac{5x}{4}=33$
6. $\frac{3x}{2}+\frac{4x}{3}=17$
7. $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}=7$

3. $\frac{x}{2}+\frac{x}{5}=14$

4. $\frac{5x}{2}+\frac{3x}{5}=93$

5. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=20$

8. $\frac{3x}{2}+\frac{x}{3}=22$

9. $\frac{x}{2}+\frac{3x}{7}=13$

10. $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{2}=19$

11. $\frac{x+2}{3}+\frac{x+6}{5}=4$

12. $\frac{x+3}{4}+\frac{x+10}{5}=5$

13. $\frac{x+3}{2}+\frac{x+7}{7}=7$

14. $\frac{x-1}{5}+\frac{x+7}{6}=5$

15. $\frac{x+3}{4}+\frac{x+4}{3}=5$

16. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+10}{5}=6$

17. $\frac{x+3}{2}+\frac{x+8}{5}=8$

18. $\frac{2x+5}{3}+\frac{3x+1}{4}=9$

19. $\frac{3x+1}{2}-\frac{5x-1}{3}=1$

20. $\frac{3x+1}{2}-\frac{5x-3}{3}=1$

21. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x}{4}+7$

22. $\frac{x}{2}+\frac{x}{6}=\frac{x}{5}+14$

23. $\frac{2x}{5}+\frac{5x}{6}=\frac{3x}{2}-16$

24. $\frac{x}{3}+2x=\frac{x}{4}+50$

25. $\frac{2x}{3}+x=\frac{3x}{4}+11$

26. $\frac{x}{5}+18=\frac{x}{10}+x$

27. $\frac{3x}{5}+21=\frac{7x}{10}+2x$

28. $\frac{x+1}{2}+3=\frac{x+3}{3}+x$

29. $\frac{x+2}{4}+x=\frac{x+3}{3}+5$

30. $\frac{3x+1}{2}+1=\frac{2x+3}{3}+x$

3. Уравнения с дробными коэффициентами, дающие дробные решения

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+x=1$

5. $\frac{5}{6}+2x=\frac{11}{12}+x$

10. Прикладные задачи на уравнения

В 7-м и 8-м классах наша основная задача — закрепление на материале уравнений арифметических навыков. Кроме того, уравнения — это важное вспомогательное средство для решения математических задач самого разного рода: арифметических, алгебраических, геометрических, физических и т.п. В целом же составление уравнения к данной задаче — дело существенно более трудное, чем простое решение уже готового уравнения. Шаг от простого решения к составлению уравнений таит в себе определенную трудность. Однако наша задача не избегать трудностей, а стремиться преодолевать их. Мы должны приступить к этому не позже 8-го класса. В старшей школе ученики знакомятся с целым рядом уравнений иного рода: уравнениями с несколькими неизвестными, квадратными уравнениями, тригонометрическими уравнениями.

На самом деле составлением уравнений мы занимаемся с самого начала — равно как и уравнениями как таковыми — с того момента, когда начинаем решать задачи *устно*.

Я задумываю число;

если я прибавляю к нему 2, получается 72.

$$x + 25 = 72$$

Если к упятеренному задуманному числу я прибавляю 7, получается 22.

$$5x + 7 = 22$$

Если от третьей части задуманного числа я отнимаю 4, получается 11.

$$\frac{x}{3} - 4 = 11$$

Если, умножив задуманное число на 7, я прибавляю к нему 5, то получается ровно столько же, сколько будет, если задуманное число утроить и к результату прибавить 21.

Такие задачи — это не что иное, как уравнения в устной форме. Их остается только перевести в привычный знаковый вид. Естественно, формулировки могут быть и позаковыристее.

“Если увеличенное на 2 утроенное задуманное число умножить на 7, то получится столько же, сколько будет, если умножить задуманное число на 25 и вычесть из результата 2”. Нужно отчетливо представить себе содержание этого предложения:

$$7 \cdot (3x + 2) = 25x - 2$$

“Шестая часть некоего числа на 5 меньше его четверти”.

Если поручить составление уравнения ученикам, то многие предложат:

$$\frac{x}{6} - 5 = \frac{x}{4}$$

Однако это уравнение не соответствует тексту. Там сказано, что $\frac{x}{6}$ меньше, чем $\frac{x}{4}$. Чтобы из неравенства возникло равенство, нужно либо увеличить меньшую дробь, либо уменьшить большую.

Или $\frac{x}{6} + 5 = \frac{x}{4}$

или $\frac{x}{6} = \frac{x}{4} - 5$

Оба уравнения эквивалентны. Мы решим первое:

$$\frac{x}{6} + 5 = \frac{x}{4} \quad \Big| -\frac{x}{6}$$

$$5 = \frac{x}{4} - \frac{x}{6} \quad \Big| \text{ (к общему знаменателю)}$$

$$5 = \frac{3x}{12} - \frac{2x}{12}$$

$$5 = \frac{x}{12} \qquad \Big| \cdot 12$$

$$60 = x$$

Проверка:

$$\frac{x}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

$$\frac{x}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

Шестая часть от 60 и вправду на 5 меньше, чем четверть.

Теперь обратимся к задачам, в которых не просто нужно перевести уравнение из словесной в знаковую форму, а где уравнение действительно нужно составить.

Пример 1: В ряду натуральных чисел существуют четыре определеных друг за другом идущих числа, сумма которых дает 666. Что это за числа?

Лучше всего просто попробовать. Составим сумму каких-нибудь подряд стоящих чисел, например:

33 + 34 + 35 + 36 = 138

Сумма, однако, слишком мала! Попробуем увеличить числа:

120 + 121 + 122 + 123 = 486

Уже ближе, но теперь слишком много. Вместо гаданий порассуждаем: четыре искомых числа должны быть где-то в районе четверти от 666:

666 : 4 = 166. Остаток 2

Попробуем для начала 166:

166 + 167 + 168 + 169 = 670

Сумма больше нужного значения на 4! Если уменьшить каждое число на 1, все должно сойтись!

$$165 + 166 + 167 + 168 = 666$$

В общем случае правильнее не бросаться сразу же очертя голову составлять уравнения, а сделать ряд систематических проб. Это возбуждает фантазию. В голову приходят мысли, позволяющие нам глубже понять проблему.

И в конце концов можно задаться вопросом: “Как же целенаправленно, без лишних проб и ошибок, сразу же найти искомые числа?”

Какова сумма четырех подряд стоящих чисел, начинающихся с некоего x? За x следуют $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$. Сумма всех четырех должна равняться 666:

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 666$$

Скобки написаны нами для того, чтобы яснее отделить числа друг от друга. При сложении от них можно избавиться.

$$\begin{aligned} 4x + 6 &= 666 \quad \big| -6 \\ 4x &= 660 \quad \big| :4 \\ x &= 165 \end{aligned}$$

Так можно сразу же найти первое число 165. Кроме того, мы знаем теперь, что сумма любых четырех подряд идущих чисел имеет структуру $4x + 6$, причем исходное число — это x. Проверим это на первых натуральных числах:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 4 \cdot 1 + 6$$
$$2 + 3 + 4 + 5 = 14 = 4 \cdot 2 + 6$$
$$3 + 4 + 5 + 6 = 18 = 4 \cdot 3 + 6$$
...

Только числа такой $(4x + 6)$ структуры могут быть суммой четырех подряд идущих чисел.

Пример 2: Четыре подряд стоящих *нечетных* числа дают в сумме 96.

Само собой разумеется, мы будем опираться на рассуждения предыдущего примера. Возьмем некое нечетное число и назовем его x. Чему равны следующие за ним нечетные числа? Одно нечетное число отстоит от другого на 2. Итак, это x, $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$. Их сумма должна быть равна 96.

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 96$$
$$4x + 12 = 96 \quad \Big| -12$$
$$4x = 84 \quad \Big| :4$$
$$x = 21$$

Проверка:

$$21 + 23 + 25 + 27 = 96$$

Уравнение составлено так, что ниоткуда не следует нечетность искомых чисел. С тем же успехом мы могли бы найти и четные числа. Есть, однако, некоторый способ записи, гарантирующий нечетность: если x — произвольное целое число, то $2x$ — обязательно *четное*, а $2x + 1$ (или $2x - 1$) — обязательно *нечетное*. Действительно,

$x = 0$	$2x = 0$	$2x + 1 = 1$
$x = 1$	$2x = 2$	$2x + 1 = 3$
$x = 2$	$2x = 4$	$2x + 1 = 5$
$x = 3$	$2x = 6$	$2x + 1 = 7$
...	...	...

Получаются два ряда последовательных четных и нечетных чисел. Теперь мы можем так записать уравнение, чтобы речь в нем шла о четырех последовательных *нечетных* числах:

$$(2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5) + (2x + 7) = 96$$
$$8x + 16 = 96 \quad \Big| -16$$
$$8x = 80 \quad \Big| :8$$
$$x = 10$$

Четыре искомых числа: $2 \cdot 10 + 1 = 21$ $2 \cdot 11 + 1 = 23$ и т.д.

Снова мы получаем структуру — на этот раз суммы последовательных *нечетных* чисел: $s = 8x + 16$, причем x — произвольное целое число.

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 8 \cdot 0 + 16$$
$$3 + 5 + 7 + 9 = 24 = 8 \cdot 1 + 16$$
$$5 + 7 + 9 + 11 = 32 = 8 \cdot 2 + 16$$
...

Задача: Определи структуру суммы четырех последовательных *четных* чисел.

Пример 3: Четыре следующих друг за другом числа, *кратных 7*, дают в сумме 182. Что это за числа?

Снова обозначим первое x, тогда следующие будут $x + 7$, $x + 14$, $x + 21$.

$$x + (x + 7) + (x + 14) + (x + 21) = 182$$
$$4x + 42 = 182 \quad \Big| -42$$
$$4x = 140 \quad \Big| : 4$$
$$x = 35$$

Проверка:

$$35 + 42 + 49 + 56 = 182$$

При составлении уравнения мы учитывали только “шаг” между числами. Если первое число не делится на 7, то и остальные тоже. Снова поищем способ задать именно кратные 7 числа: первое число обозначим $7x$ (x — любое целое число).

$$7x + (7x + 7) + (7x + 14) + (7x + 21) = 182$$
$$28x + 42 = 182 \quad \Big| -42$$
$$28x = 140 \quad \Big| : 28$$
$$x = 5$$

Четыре искомых числа:

$7 \cdot 5 = 35$ $\qquad$ $7 \cdot 5 + 7 = 42$

$7 \cdot 5 + 14 = 49$ $\qquad$ $7 \cdot 5 + 21 = 56$

Пример 4: Нужно так разделить 3000 марок на 5 человек, чтобы каждый следующий получил бы на 20 марок больше предыдущего.

Начало аналогично. Пусть первый получит x. Тогда второй получит на 20 больше, т.е. $x + 20$ и т.д. Уравнение:

$$x + (x + 20) + (x + 40) + (x + 60) + (x + 80) = 3000$$
$$5x + 200 = 3000 \quad \Big| -200$$
$$5x = 2800 \quad \Big| :5$$
$$x = 560$$

Итак, искомые числа: 560, 580, 600, 620, 640.

Если их сложить, получится действительно 3000. Среднее число особенное — оно является во всех смыслах серединой пятерки. Выберем в качестве x именно это третье число. Тогда нужно отнять от него 20 и 40 и затем прибавить снова 20 и 40:

$$(x - 40) + (x - 20) + x + (x + 20) + (x + 40) = 3000$$
$$5x = 3000 \quad \Big| :5$$
$$x = 600$$

Среднее число вычислять-то легче! Если бы в предыдущих примерах мы работали с 5 или с любым другим нечетным количеством чисел, то имело бы прямой смысл брать за x среднее число.

Мы занимались пока такими последовательностями, в которых числа *равноудалены* друг от друга. Такие последовательности называются *арифметическими прогрессиями*. Они играют важнейшую роль в структуре арифметики. К ним принадлежат знакомые нам из таблицы умножения. Примеры позволили нам заглянуть чуть глубже в их структуру. В 10-м классе тема арифметической прогрессии рассматривается на ином уровне и в более широкой связи.

Пример 5: У А в 3 раза больше орехов, чем у Б. Если же А

отдаст Б 25 орехов, то у него будет только половина от того количества орехов, которое окажется у Б.

Задача для нас внове. Сперва неплохо просто попробовать. Предположим, у Б 20 орехов. Тогда у А — 60. После обмена у А окажется 35 орехов, у Б — 45. У А меньше, но все же не половина. Мы могли бы теперь сделать новую попытку.

Вместо этого обозначим количество орехов у Б за x.

	А	Б
Вначале	$3x$	x
После обмена	$3x - 25$	$x + 25$

У А и Б разное количество орехов, причем как вначале, так и в конце. У А сперва в 3 раза больше, затем — ровно половина. Половина! Итак, после обмена достояние А равно половине достояния Б. Уравнение:

$$3x - 25 = \frac{1}{2} \cdot (x + 25)$$

Равно справедливо, что достояние Б стало в 2 раза больше, чем достояние А.

$$2 \cdot (3x - 25) = x + 25$$

Второе уравнение мы арифметически получаем из первого умножением на 2. Реальное достижение в данной задаче — это правильное составление уравнения. Решение же труда не представляет.

$$\begin{aligned} 2 \cdot (3x - 25) &= x + 25 \\ 6x - 50 &= x + 25 \quad \Big| \; -x + 50 \\ 5x &= 75 \quad \Big| \; :5 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Проверка будет в данном случае состоять не просто в том, чтобы подставить найденное число в уравнение, поскольку дело не только в том, правильно ли мы уравнение решили. Соответствует ли наше уравнение поставленной проблеме —

вот в чем вопрос. И он самый важный. Значит, решение нужно соотнести с текстом.

	А	Б
Вначале	45	15
После обмена	45 – 25 = 20	15 + 25 = 40

Мы нашли правильное решение: А после обмена имеет ровно половину орехов Б.

Пример 6: В первой кассе на 240 марок больше, чем во второй. Если из второй переложить в первую 335 марок, то в ней окажется ровно вдвое больше, чем в первой.

Задача похожа на предыдущую. Обозначим начальное состояние второй кассы за x.

	1-я касса	2-я касса
Вначале	$x + 240$	x
После обмена	$x + 240 + 335$	$x – 335$

В первой кассе денег как до, так и после обмена больше, чем во второй. После обмена во второй кассе оказывается половина средств, сосредоточенных в первой. Это и можно приравнять:

$$\frac{1}{2} \cdot (x + 575) = x – 335$$

Или удвоенное содержимое второй кассы равно содержимому первой:

$$x + 575 = 2 \cdot (x – 335)$$

Второе уравнение возникает из первого умножением на 2. Решим второе уравнение:

$$x + 575 = 2 \cdot (x – 335)$$
$$x + 575 = 2x – 670 \qquad \Big| – x + 670$$
$$1245 = x$$

Проверка:	1-я касса	2-я касса

Вначале	1485	1245
После обмена	1485 + 335 = 1820	1245 – 335 = 910

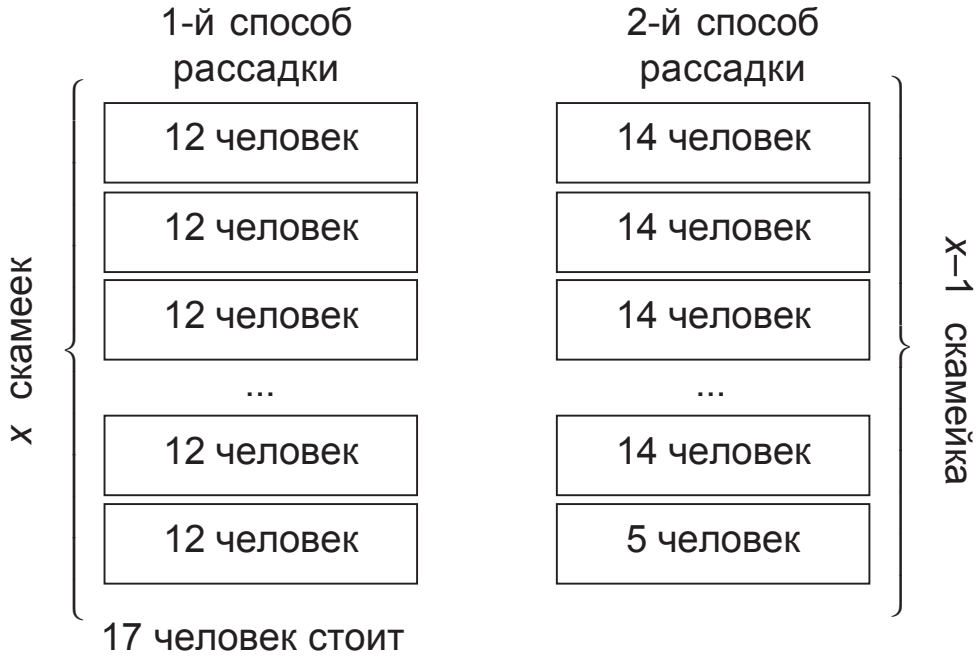
Уравнение составлено верно; решение дает действительно решение проблемы: после перемещения содержимое второй кассы оказывается ровно вполовину меньше содержимого первой.

Как будет выглядеть уравнение, если мы обозначим за x содержимое первой кассы?

Проверка:	1-я касса	2-я касса
Вначале	x	$x – 240$
После обмена	$x + 335$	$x – 240 – 335$

$$x + 335 = 2 \cdot (x – 575)$$
$$x + 335 = 2x – 1150 \quad \Big| – x + 1150$$
$$1485 = x$$

Пример 7: В зале нужно усадить некоторое количество человек на ряды скамеек равной длины. Если на скамью садится по 12 человек, тогда 17 вынуждены будут стоять. Если же усаживать по 14 человек, тогда все скамьи окажутся



заполненными, кроме последней, на которой усядутся 5 человек. Сколько скамеек и сколько человек?

Здесь два неизвестных: количество скамеек и количество человек. Обозначим одно за x (количество скамеек) и представим себе порядок рассадки:

Посчитаем количество человек:

1-й способ рассадки: $x \cdot 12 + 17$
2-й способ рассадки: $(x - 1) \cdot 14 + 5$

И там и там количество людей одинаково. Отсюда уравнение:

$$\begin{aligned} x \cdot 12 + 17 &= (x - 1) \cdot 14 + 5 \\ 12x + 17 &= 14x - 14 + 5 \\ 12x + 17 &= 14x - 9 \quad \Big| -12x + 9 \\ 26 &= 2x \quad \Big| : 2 \\ 13 &= x \end{aligned}$$

Для проверки сосчитаем двумя способами количество людей:

1-й способ рассадки: $13 \cdot 12 + 17 = 156 + 17 = 173$ человека

2-й способ рассадки: $12 \cdot 14 + 5 = 168 + 5 = 173$ человека

Если обозначить за x количество человек, то число скамеек равно:

1-й способ рассадки: $\frac{x - 17}{12}$

2-й способ рассадки: $\frac{x + 9}{14}$

В обоих случаях количество скамеек одинаково:

$$\frac{x - 17}{12} = \frac{x + 9}{14} \quad \Big| \cdot 84$$

$$7(x - 17) = 6(x + 9)$$
$$7x - 119 = 6x + 54 \quad \Big| - 6x + 119$$
$$x = 173$$

Задачи к главе 10
Прикладные задачи по теме “Уравнения”

1. Если увеличить удвоенное (утроенное) число на 20 (25), получится усемиренное (увосьмиренное) исходное число. Каково оно?
2. Удесятиренное (удевятиренное) число на 30 (32) больше, чем усемиренное (упятиренное). Что это за число?
3. Шестая (девятая) часть числа на 10 (16) меньше, чем четвертая (пятая) часть. Что это за число?
4. Если к умноженному на 5 (на 7) числу прибавить 40 (14), то получится то же самое, как если от умноженного на 9 (на 10) числа отнять 8 (13).
5. Если к упятиренному неизвестному прибавить 3 и затем удвоить, то получится то же самое, как если от умноженного на 15 неизвестного отнять 14.
6. Четыре последовательных натуральных числа в сумме дают 210 (178).
7. Пять (семь) последовательных натуральных чисел в сумме дают 305 (364).
8. Четыре последовательных нечетных числа в сумме дают 264 (296).
9. Три (пять) последовательных нечетных числа в сумме дают 333 (405).
10. Четыре (пять) последовательных кратных 7 числа в

сумме дают 350 (315).

11. У А в три раза больше орехов, чем у Б. А отдает Б 35 (50) орехов, и теперь у него в два раза меньше орехов, чем у Б.

12. В первой кассе на 120 (110) марок больше, чем во второй. Если из второй переложить в первую 60 (70) марок, то ее содержимое станет равно половине содержимого первой кассы.

13. В зале люди рассаживаются на равные скамьи. Если на каждую лавку сядет по 7 (5) человек, тогда 6 (8) останутся стоять. Если же на каждую скамью сядет 8 (6) человек, тогда на последнюю усядется только 4 (3) человека. Сколько человек и сколько скамеек?

14. Разделить 2500 (2800) марок на 5 (7) человек так, чтобы каждый следующий получил на 50 (30) больше, чем предыдущий.

15. В четырех классах 120 учеников. Во 2-м на 5 учеников больше, чем в 1-м, в 3-м на 8 больше, чем во 2-м, в 4-м на 36 меньше, чем в трех первых.

16. Мальчику досталось сколько-то конфет. $^2/_7$ он подарил брату, из остатка половину проиграл и еще три потерял. Две он принес домой. Сколько ему досталось?

Решение задач

Решение задач к главе 6 Переход от числовых к алгебраическим вычислениям

1-я группа

1. $6{,}9a + 12{,}8b = 15{,}3c$
2. $10{,}8a + 4{,}5b + 6{,}0c$
3. $6a + 15b + 16c$
4. $16a + 47b + 4c$
5. 67
6. 82
7. $1^7/_8$
8. $1^7/_{12}$
9. $\frac{2}{5}$
10. $\frac{37}{42}$
11. $8{,}3a + 15{,}0b + 12{,}2c$
12. $9{,}0a + 5{,}8b + 5{,}8c$
13. $31a + 18b + 8c$
14. $47a + 50b + 60c$
15. 28
16. 155
17. 2
18. $1^2/_3$
19. $\frac{7}{12}$
20. $1^2/_5$

2-я группа

1. $a^2 + 12a + 35$
2. $a^2 + 26a + 165$
3. $6a^2 + 26a + 24$
4. $40a^2 + 101a + 63$
5. $2a^2 + 26a + 94$
6. $13a^2 + 43a + 34$
7. $\frac{1}{5}$
8. $\frac{10}{27}$
9. $\frac{5}{8} = 0{,}625$
10. $\frac{1}{40} = 0{,}025$
11. $a^2 + 19a + 90$
12. $a^2 + 29a + 204$
13. $15a^2 + 38a + 24$
14. $24a^2 + 102a + 24$
15. $2a^2 + 27a + 59$
16. $19a^2 + 58a + 61$
17. $\frac{56}{225}$
18. $\frac{44}{35} = 1^9/_{35}$
19. $\frac{21}{20} = 1{,}05$
20. $\frac{3}{20} = 0{,}15$

3-я группа

1. 51
2. 63,94
3. 10,01
4. 66
5. 104
6. $\frac{1}{3}$
7. 2,1
8. 0,63
9. $2a^2 + 18a + 61$
10. $6a^2 + 11a - 10$
11. 130,9
12. 56,95
13. 16,2
14. 84
15. 64
16. $\frac{24}{5} = 4^4/_5$
17. 3,2
18. 3,36
19. $7a^2 + 19a + 33$
20. $27a^2 + 67a + 52$

4-я группа

1. 99
2. 159
3. 243
4. 119
5. 161
6. 84
7. $1\ \frac{3}{4}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{8}$
8. $\frac{2}{3}\ \frac{5}{4}\ 2\ \frac{17}{6}$
9. $33a^2 + 111ab + 36b^2$
10. $18a^3 + 54a^2 + 28a$
11. 112
12. 136
13. 256
14. 132
15. 92
16. 56
17. $2\ \frac{5}{4}\ 1\ \frac{7}{8}$
18. 1 2 3 4
19. $15a^2 + 52ab + 32b^2$
20. $54a^3 + 93a^2 + 35a$

5-я группа

1. 117	2. 729	3. 1029	4. 196	5. 784	6. 392
7. 1	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{5}$

8. 1	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{7}$	2	$\frac{27}{11}$	$\frac{34}{7}$
9. $\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{36}{11}$	$\frac{32}{9}$	$\frac{100}{27}$	$\frac{200}{51}$
10. 1	$\frac{17}{8}$	$\frac{37}{11}$	$\frac{65}{14}$	$\frac{101}{17}$	$\frac{401}{32}$
11. 424	12. 1472	13. 968	14. 996	15. 744	16. 1362
17. 2	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{9}$	1	$\frac{14}{15}$	$\frac{4}{5}$
18. 4	$\frac{10}{3}$	$\frac{18}{5}$	4	$\frac{40}{9}$	$\frac{130}{19}$
19. $\frac{9}{4}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{144}{7}$	$\frac{225}{8}$	$\frac{900}{13}$
20. 3	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{6}{5}$

6-я группа

1. 1
2. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{2}{5}$
4. $\frac{7}{25}$
5. $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{7}, \frac{2}{3}$
6. $\frac{45}{32}=1^{13}/_{32}$
7. $\frac{2}{5}$
8. $\frac{16}{5}=3^{1}/_{5}$
9. 4
10. 148

11. 984

12. 233

13. 4,96

14. 6,09

15. $\frac{17}{10}=1^{7}/_{10}$

16. $\frac{8}{5}=1^{3}/_{5}$

17. $\frac{38}{17}=2^{4}/_{17}$

18. $\frac{61}{27}=2^{7}/_{27}$

19. $\frac{3}{14}$, $\frac{4}{3}=1^{1}/_{3}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{11}{13}$, $\frac{4}{3}=1^{1}/_{3}$

20. $\frac{5}{4}=1^{1}/_{4}$

21. $\frac{21}{10}=2^{1}/_{10}$

22. $\frac{3}{4}$

23. $\frac{3}{4}$

24. 486

25. 585

26. 3825

27. 5,46

28. 10,92

7-я группа

1. 15,12

2. 2,52

3. $\frac{38}{3}=12^{2}/_{3}$

4. $\frac{28}{5}=5^{3}/_{15}$

5. $\frac{7}{4}=1^{3}/_{4}$

6. $\frac{28}{15}=1^{13}/_{15}$

7. $\frac{133}{30}=4^{13}/_{30}$

8. $\frac{23}{12}=1^{11}/_{12}$

9. 10

10. $\frac{9}{4}=2^{1}/_{4}$

11. 468

12. 369

13. 76

14. 186

15. 5,4
16. 3,78
17. 7
18. $\frac{55}{7}=7^{6}/_{7}$
19. $\frac{43}{24}=1^{19}/_{24}$
20. $\frac{9}{35}$
21. $\frac{71}{8}=8^{7}/_{8}$
22.
23.
24.
25. 648
26. 205
27. 210
28. 216

8-я группа

1. $\frac{14}{3}=4^{2}/_{3}$
2. $\frac{2}{7}$
3. 11
4. 11
5. $\frac{7a}{12}$
6. $\frac{58a}{30}=\frac{29a}{15}$
7. $\frac{101a}{20}$
8. $\frac{5a}{15}=\frac{a}{3}$
9. $\frac{16a+21b}{6}$
10. $\frac{73a+10b}{20}$
11. $\frac{19}{4}=4^{3}/_{4}$
12. $\frac{4}{9}$
13. 16
14. $12^{5}/_{11}$
15. $\frac{11a}{30}$
16. $\frac{21a}{28}=\frac{3a}{4}$
17. $\frac{151a}{60}$
18. $\frac{7a}{17}$
19. $\frac{31a+22b}{12}$
20. $\frac{43a+2b}{40}$

Решение задач на повторение из главы 6

1-я группа

1. 153
2. 1089
3. 891
4. 25,41
5. $\frac{15}{32}$
6. $84a^2 + 20ab - 24b^2$
7. $\frac{23}{12} = 1^{11}/_{12}$
8. $\frac{26}{3} = 8^2/_3$
9. $\frac{129}{28} = 4^{17}/_{28}$
10. $\frac{11a}{30}$
11. $\frac{17a}{12}$
12. $\frac{31a}{6}$
13. 0,9
14. $5^1/_4 = 5,25$
15. $\frac{69}{40} = 1^{29}/_{40} = 1,725$
16. $\frac{1}{6}$
17. $\frac{22a + 30b}{15}$
18. $\frac{24a - 29b}{14}$
19. 21,42
20. 10,89

2-я группа

1. 184
2. 968
3. 704
4. 23,49
5. $\frac{32}{25} = 1^7/_{25}$
6. $221a^2 - 68ab - 153b^2$
8. $6^3/_5$
9. $\frac{229}{6} = 38^1/_6$
10. $\frac{7a}{12}$
11. $\frac{37a}{30}$
12. $\frac{34a}{21}$
13. 1,1

7. $\frac{31}{12}=2^7/_{12}$

14. 11,25

15. 2,25

16. $\frac{7}{40}=0{,}175$

17. $\frac{29a+31b}{15}$

18. $\frac{40a-41b}{14}$

19. 18,92

20. 2,94

Решения задач к главе 7

Задачи на алгебраические преобразования с положительными и отрицательными числами

1-я группа

1. $12x - 6 + 30y$
2. $39a - 91b + 13$
3. $15 + 30m - 45n$
4. $11\cdot(2x - 1 + 3y)$
5. $9\cdot(4a - 3b + 1)$
6. $7\cdot(1 + 6m - 5n)$
7. $10xy + 35x^2$
8. $24a^2 - 32ab$
9. $77z^2 + 21xz$
10. $7x\cdot(3y + 5x)$
11. $9a\cdot(2a - 5b)$
12. $11z\cdot(4z + 5x)$
13. $20a + 35a^2 - 45a^3$
14. $35x + 21x^3 - 7x^4$
15. $54m^2 + 63m^3 - 162m^4$
16. $9a\cdot(5 - 2a + 3a^2)$
17. $10x\cdot(2 - 3x + 5x^2)$
18. $17m\cdot(1 + 2m - 3m^4)$
19. $15a^2b + 12ab^2 + 21ab$
20. $10x^2y + 40xy^2 + 25xy$
21. $18m^2n - 42mn^2 - 66mn$
22. $7ab\cdot(2a + 3b + 5)$
23. $2xy\cdot(3x - 5y + 7)$
24. $11mn\cdot(5m + 3n - 8)$
25. $-15x + 10 - 30y$
26. $-60a - 24b + 12$
27. $-13 + 52m - 65n$
31. $-12x^2 + 20xy$
32. $28a^2 - 21ab$
33. $15z^2 + 18xz$

28. $(-7)\cdot(-3x + 4 + 6y)$
29. $(-5)\cdot(3a + 5b - 6)$
30. $(-9)\cdot(1 - 3m + 4n)$
37. $-12a + 48a^2 + 24a^3$
38. $45x^4 + 60x^3 - 90x$
39. $77m^2 - 33m^3 + 44m^4$
34. $(-8x)\cdot(3y - 4x)$
35. $(-13a)\cdot(2a - 3b)$
36. $(-12z)\cdot(z + 4)$
40. $(-8a)\cdot(-2 + 3a + 5a^2)$
41. $(-10x)\cdot(9x + 5 - 3x^2)$
42. $(-19m)\cdot(m^4 - 2m^2 + 3)$

2-я группа

1. $x^2 + 11x + 24$
2. $x^2 + 15x + 44$
3. $x^2 + 18x + 72$
4. $x^2 + 23x + 126$
5. $x^2 + 31x + 240$
6. $x^2 + 42x + 440$
7. $x^2 + 55x + 750$
8. $x^2 + 75x + 1400$
9. $(x + 2)\cdot(x + 5)$
10. $(x + 4)\cdot(x + 3)$
11. $(x + 3)\cdot(x + 5)$
12. $(x + 6)\cdot(x + 4)$
13. $(x+ 8)\cdot(x + 3)$
14. $(x + 2)\cdot(x + 12)$
15. $(x + 1)\cdot(x + 12)$
16. $(x + 1)\cdot(x + 20)$

17. $x^2 - 13x + 40$
18. $x^2 - 10x + 9$
19. $x^2 - 20x + 99$
20. $x^2 - 19x + 70$
21. $x^2 - 21x + 90$
22. $x^2 - 21x + 38$
23. $x^2 - 35x + 300$
24. $x^2 - 20x + 51$
25. $x^2 - 24x + 108$
26. $(x - 3)\cdot(x - 7)$
27. $(x - 4)\cdot(x - 5)$
28. $(x - 9)\cdot(x - 3)$
29. $(x - 8)\cdot(x - 5)$
30. $(x - 5)\cdot(x - 7)$
31. $(x - 3)\cdot(x - 11)$
32. $(x - 2)\cdot(x - 13)$

33. $(x - 3)\cdot(x - 15)$
34. $(x - 1)\cdot(x - 17)$
35. $x^2 + 7xy + 10y^2$
36. $x^2 + 14xy + 33y^2$
37. $x^2 + 15xy + 54y^2$
38. $x^2 + 16xy + 15y^2$
39. $x^2 - 11xy + 28y^2$
40. $x^2 - 17xy + 72y^2$
41. $x^2 - 16xy + 48y^2$
42. $x^2 - 19xy + 18y^2$
43. $(x + 3y)\cdot(x + 5y)$
44. $(x + 8y)\cdot(x + 7y)$

45. $(x + 13y)\cdot(x + 4y)$
48. $(x - 7y)\cdot(x - 4y)$

46. $(x + 10y)\cdot(x + y)$
47. $(x – 3y)\cdot(x – 6y)$
49. $(x – 14y)\cdot(x – 3y)$
50. $(x – 20y)\cdot(x – y)$

3-я группа

1. $x^2 + 3x – 40$
2. $x^2 + 8x – 20$
3. $x^2 + 9x – 220$
4. $x^2 + 7x – 120$
5. $x^2 + x – 132$
6. $x^2 + 7x – 98$
7. $(x + 8)\cdot(x – 3)$
8. $(x + 9)\cdot(x – 2)$
9. $(x + 10)\cdot(x – 6)$
10. $(x + 11)\cdot(x – 5)$
11. $(x + 12)\cdot(x – 7)$
12. $(x + 20)\cdot(x – 8)$

13. $x^2 – 7x – 30$
14. $x^2 – 10x – 24$
15. $x^2 – 6x – 27$
16. $x^2 – 7x – 44$
17. $x^2 – 12x – 45$
18. $x^2 – 5x – 126$
19. $(x – 10)\cdot(x + 4)$
20. $(x – 8)\cdot(x + 2)$
21. $(x – 11)\cdot(x + 2)$
22. $(x – 13)\cdot(x + 1)$
23. $(x – 101)\cdot(x + 1)$
24. $(x – 6)\cdot(x + 5)$

25. $x^2 + 14x – 72$
26. $x^2 – 14x – 51$
27. $x^2 + 6x – 72$
28. $(x + 12)\cdot(x – 1)$
29. $(x – 18)\cdot(x + 2)$
30. $(x – 15)\cdot(x + 8)$
31. $x^2 + 4xy – 12y^2$
32. $x^2 + xy – 30y^2$
33. $x^2 + 2xy – 120y^2$
34. $x^2 + 12xy – 13y^2$
35. $x^2 + 2xy – 35y^2$
36. $x^2 – xy – 56y^2$

37. $x^2 – 5xy – 150y^2$
38. $x^2 – 10xy – 11y^2$
39. $(x + 9y)\cdot(x – 2y)$
40. $(x + 4y)\cdot(x – 3y)$
41. $(x + 15y)\cdot(x – 5y)$
42. $(x + 21y)\cdot(x – y)$
43. $(x – 6y)\cdot(x + 2y)$
44. $(x – 9y)\cdot(x + 8y)$
45. $(x – 20y)\cdot(x + 10y)$
46. $(x – 9y)\cdot(x + y)$

4-я группа

Разложи на множители	Раскрой скобки
1. $a^2 + 10a + 21$	4. $(a + 4)\cdot(a + 3)$
2. $a^2 + 13a + 22$	5. $(a + 5)\cdot(a + 10)$
3. $x^2 + 5x + 4$	6. $(x + 8)\cdot(x + 1)$
7. $x^2 – 10x + 24$	10. $(x – 5)\cdot(x – 3)$
8. $x^2 – 11x + 28$	11. $(x – 2)\cdot(x – 10)$
9. $a^2 – 12a + 11$	12. $(x – 9)\cdot(x – 1)$
13. $a^2 + a – 30$	16. $(a – 2)\cdot(a + 7)$
14. $a^2 + a – 90$	17. $(a – 6)\cdot(a + 7)$
15. $a^2 + 4a – 45$	18. $(a – 5)\cdot(a + 9)$
19. $a^2 – 9a – 36$	22. $(a – 9)\cdot(a + 4)$
20. $x^2 – 6x – 135$	23. $(x – 15)\cdot(x + 2)$
21. $x^2 – x – 42$	24. $(x – 11)\cdot(x + 3)$
25. $x^2 – 2xy – 15y^2$	28. $(x – 7y)\cdot(x + 4y)$
26. $a^2 + 19ab + 78b^2$	29. $(a + 5b)\cdot(a + 13b)$
27. $a^2 – 22ab + 85b^2$	30. $(a – 7b)\cdot(a – 13b)$
31. $x^2 + 5x – 36y^2$	34. $(x – 3y)\cdot(x + 17y)$
32. $a^2 + ab – 110b^2$	35. $(a – 15b)\cdot(a + 16b)$
33. $x^2 – 9xy – 36y^2$	36. $(x – 15y)\cdot(x + 2y)$
37. $a^2 – 19ab + 78b^2$	40. $(a – 12b)\cdot(a – 10b)$
38. $x^2 + 7xy – 98y^2$	41. $(x – 6y)\cdot(x + 12y)$
39. $a^2 – 10ab – 11b^2$	42. $(a – 10b)\cdot(a + b)$

5-я группа

Решения примеров на биноминальные формулы

1. $4 + 20b + 25b^2$	4. $(4 + 3b)^2$
2. $9a^2 + 42a + 49$	5. $(3a + 5)^2$
3. $25x^2 + 110x + 121$	6. $(7x + 12)^2$
7. $16 – 72b + 81b^2$	10. $(6 – 7b)^2$
8. $64a^2 – 48a + 9$	11. $(11a – 3)^2$

9. $169x^2 - 364x + 169$

12. $(15x - 16)^2$

13. $4x^2 + 121xy + 9y^2$
14. $25u^2 + 70uv + 49v^2$
15. $65m^2 + 144mn + 81n^2$
16. $(3x + 5y)^2$
17. $(6u + 2v)^2$
18. $(7m + 4n)^2$
19. $36a^2 - 132ab + 121b^2$
20. $a^2 - 30ab + 225b^2$
21. $100a^2 - 240ab + 144b^2$
22. $(5a - 10b)^2$
23. $(a - 12b)^2$
24. $(20a - 9b)^2$

25. $81a^2 - 1$
26. $16a^2 - 25b^2$
27. $121x^2 - 4y^2$
28. $(5a - 1)\cdot(5b - 1)$
29. $(7a - 6b)\cdot(7a + 6b)$
30. $(13x - 4y)\cdot(13x + 4y)$

Биноминальные формулы (продолжение)

1. $(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$
2. $(5x + 8y)^2 = 25x^2 + 80xy + 64y^2$
3. $(11a - 2b)^2 = 121a^2 - 44ab + 4b^2$
4. $(5a - 7b)\cdot(5a + 7b) = 25a^2 - 49b^2$
5. $(10x - 9y)\cdot(10x + 9y) = 100x^2 - 81y^2$
6. $(a + 1)\cdot(a - 1) = a^2 - 1$
7. $(9x - 5y)^2 = 81x^2 - 90xy + 25y^2$
8. $(x - 12y)^2 = x^2 - 24xy + 144y^2$
9. $(6a - 11b)^2 = 36a^2 - 132ab + 121b^2$
10. $(a + b)\cdot(a - b) = a^2 - b^2$
11. $(x^2 + y)\cdot(x^2 - y) = x^4 - y^2$
12. $(9a^2 + 5b^2)\cdot(9a^2 - 5b^2) = 81a^4 - 25b^4$

6-я группа

1. $(x + 4)\cdot(x + 7)$
2. $(x + 3)\cdot(x + 9)$
3. $(x + 12)\cdot(x + 3)$
4. $(x + 5)\cdot(x + 13)$
5. $(x + 6)^2$
6. $(x + 8)\cdot(x + 2)$
7. $(x + 1)\cdot(x + 11)$
8. $(x + 4)^2$
10. $(x + 20)\cdot(x + 5)$
11. $(x - 5)\cdot(x - 6)$

9. $(x + 7)^4$

12. $(x – 9)^2$

13. $(x – 2)\cdot(x – 7)$
14. $(x – 12)^2$
15. $(x – 25)\cdot(x – 4)$
16. $(x + 9)\cdot(x – 4)$
17. $(x + 16)\cdot(x – 4)$
18. $(x + 5)\cdot(x – 3)$
19. $(x + 5)\cdot(x – 4)$
20. $(x + 12)\cdot(x – 12)$
21. $(x + 11)\cdot(x – 10)$
22. $(x + 8)\cdot(x – 8)$
23. $(x – 9)\cdot(x + 5)$
23. $(x – 9)\cdot(x + 5)$

25. $(x – 11)\cdot(x + 3)$
26. $(x – 36)\cdot(x + 3)$
27. $(x – 16)\cdot(x + 4)$
28. $(x – 6)\cdot(x + 6)$
29. $(x – 18)\cdot(x + 2)$
30. $(x – 10)\cdot(x + 10)$

31. $(x + 6y)\cdot(x + 3y)$
32. $(x + 13y)^2$
33. $(2x + 5y)^2$
34. $(x – 6y)\cdot(x – 7y)$
35. $(x – 11y)^2$
36. $(3x – 4y)^2$

37. $(x + 6y)\cdot(x – 3y)$
38. $(x + 15y)\cdot(x – 15y)$
39. $(2x + 7y)\cdot(2x – 7y)$
40. $(x + 2y)\cdot(x – 11y)$
41. $(3x + 10y)\cdot(3x – 10y)$
42. $(x + 10y)\cdot(x – 11y)$

7-я группа

Разложи на множители

1. $am + an + xm + xn$
2. $bp + bq + yp + yp$
3. $ua – ub + va – vb$
4. $kr – ks – rz + zs$

Раскрой скобки

5. $(a + b)\cdot(x + y)$
6. $(m + n)\cdot(p + q)$
7. $(r + s)\cdot(a – b)$
8. $(u + v)\cdot(x – y)$

9. $au + av + 2u + 2v$
10. $xa – 4x + ya – 4y$
11. $ab + 2a + b + 2$
12. $6ab + 8a + 3b + 4$

13. $(x + 3)\cdot(a + b)$
14. $(a + b)\cdot(x – 5)$
15. $(x + 1)\cdot(y + 2)$
16. $(2x + 3)\cdot(5y + 7)$

17. $24a^2 + 48a + 6ab + 12b$
18. $30x^2 – 24x – 10xy – 8y$
19. $36a^2 – 9ab – 12a + 3b$
20. $45x + 27xy – 5y – 3y^2$

21. $(2a + 3b)\cdot(4a + 5)$
22. $(5x – 3y)\cdot(7x – 3)$
23. $(5a – 4)\cdot(2a – b)$
24. $(7x – y)\cdot(7 + 5y)$

25. $30x^3 + 54x^2 + 55x + 99$
26. $33a^3 + 21a^2 + 22a + 14$
27. $18b^3 - 8b^2 + 54b - 24$
28. $65a^3 - 52a^2 - 35a + 28$
29. $(5a^2 + 7)\cdot(3a + 4)$
30. $(9x^2 + 5)\cdot(4x + 7)$
31. $(3b^2 + 5)\cdot(3b - 2)$
32. $(8a^2 - 5)\cdot(4a - 7)$

8-я группа

Решения задач по теме “Сокращение алгебраических дробей”

1. $\frac{5}{7}$
2. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{11}{2}$
4. $\frac{3}{2}$
5. 6
6. 3
7. $\frac{a}{b}$
11. $3a$
12. $2b^2$
13. $\frac{5}{3}$
14. $\frac{7}{11}$
15. $\frac{1}{3}$
16. $\frac{x+3}{x+5}$
17. $\frac{x+2}{x+3}$
20. $\frac{x+2}{x+3}$
21. $\frac{x+6}{x+8}$
23. $\frac{x}{x+4}$
22. $\frac{2x^2}{x+11}$
24. $\frac{x^2}{x+2}$
25. $\frac{x+6}{3}$
26. $\frac{x+7}{3x}$

8. $\frac{a}{3}$

9. $\frac{4}{7}$

10. $\frac{3a^2}{2b}$

18. $\frac{x+9}{x+1}$

19. $\frac{x+4}{x+9}$

27. $\frac{x+2}{5}$

9-я группа

Решения задач по теме “Сокращение алгебраических дробей”

1. $\frac{2+3b}{3+4b}$

2. $\frac{x+y}{2x}$

3. $\frac{3a}{2a+4}$

4. $\frac{2}{x}$

5. $\frac{3a}{2b}$

6. $\frac{x^2}{2y}$

7. $\frac{a}{2}$

8. $\frac{7}{5}$

11. $\frac{x+7}{x+11}$

12. $\frac{x+2}{x+3}$

13. $\frac{x+5}{x-5}$

14. $\frac{2a+3b}{2a-3b}$

15. $\frac{1+7b}{1-7b}$

16. $\frac{x-3}{x-4}$

17. $\frac{x-1}{x-2}$

18. $\frac{x+2}{x+7}$

20. $\frac{x+2}{y+3}$

21. $\frac{2+y}{4+5y}$

22. $\frac{3x-5y}{7}$

23. $\frac{5a}{a-2b}$

24. $\frac{a-5b}{7}$

25. $\frac{x+4y}{x-3y}$

26. $\frac{4a+5b}{4a-5b}$

27. $\frac{x+9y}{x-4y}$

9. $\frac{a}{b}$

10. $\frac{x+2}{x+3}$

19. $\frac{b+3}{2b+5}$

10-я группа

1. $\frac{a}{b}$

2. $\frac{a+b}{a-b}$

7. $\frac{x+1}{x-1}$

8.

9. $\frac{x}{x+1}$

10. $\frac{x+1}{11}$

11. $\frac{x}{x+3}$

12.

13. $\frac{7}{x}$

3. $\frac{2x+3y}{3x+2y}$

4. $\frac{x}{2}$

14. $\frac{a}{b}$

15.

16. $\frac{b}{c}$

17. $\frac{a}{b}$

18. $\frac{5}{7(x+2)}$

19. $\frac{3}{3x-5}$

20. $\frac{7}{x-1}$

5. $\frac{4x}{3y}$

6, $\frac{x^2}{y}$

21. $\frac{1}{x-1}$

22. $\frac{x-5}{9}$

23. $\frac{x+8}{x-8}$

24. $\frac{2x+3}{2x-3}$

25. $x+1$

26.

27.

$\frac{x^2y-y^2}{x^3-y^2}$

11-я группа

Решение трудных примеров на сокращение алгебраичес-

ких дробей

1. $\frac{a(a+b)}{b(a-b)}$
2. $\frac{3(a-b)}{5(a+b)}$
3. $\frac{7(a+b)}{2a(a-b)}$
4. $\frac{2(5x+y)}{3(5x-y)}$
5. $\frac{x(x+4)}{5(x+2)}$
6. $\frac{7(x-4)}{x(x-6)}$
7. $\frac{3x(x+6)}{11(x-1)}$
8. $\frac{x(x-3)}{5(x-10)}$
9. $\frac{a(2a+3b)}{3(2a-3b)}$
10. $\frac{3b(4a-b)}{5a(4a+b)}$
11. $\frac{b(a-b)}{a(a+b)}$
12. $\frac{13(a+b)}{7(a-b)}$
13. $\frac{3(x+y)}{5y}$
14. $\frac{4(3x-y)}{7(3x+y)}$
15. $\frac{a(a+2)}{6(a+3)}$
16. $\frac{3(a+5)}{a(a+4)}$
17. $\frac{5a(a+3)}{13(a-1)}$
18. $\frac{a(a-5)}{11(a-2)}$
19. $\frac{x(3x+5y)}{2(3x-5y)}$
20. $\frac{5y(5x-y)}{3x(5x+y)}$

Решение задач на повторение из главы 7

1-я группа

1. $\frac{5}{11}$
2. $\frac{3}{5}$
5. $\frac{2x}{3y}$
6. $\frac{y^2}{x^2}$
9. $\frac{a}{a-1}$
10. $u-1$

3. $\frac{a+2b}{2a+b}$

4. $\frac{3}{4}$

7. $1 - a$

8. $\frac{2}{a+1}$

11. $\frac{5a+4}{5a-4}$

12.

2-я группа

1. $\frac{3}{7}$

2. $\frac{5}{11}$

3.

4. $\frac{5}{4}$

5. $\frac{2a}{3b}$

6. $\frac{b^2}{a^2}$

7. $\frac{1}{x-1}$

8. $\frac{x+1}{11}$

9. $\frac{x+1}{x}$

10. $\frac{1}{u+1}$

11.

12. $\frac{a+6}{a+5}$

3-я группа

$\frac{2a+5b}{2a+5b}$

1. $\frac{2x+3}{3x+2}$

2. $\frac{3x}{4y}$

3. $\frac{x^2}{y^2}$

4. $a - 1$

5. $\frac{8}{a+1}$

6. $\frac{a}{a+1}$

7. $x + 2$

8. $\frac{2x+3}{2x-3}$

9.

10. $\frac{x+y}{x-y}$

11. $\frac{x(x+2)}{5(x+1)}$

12. $\frac{2x(x+3)}{x-3}$

4-я группа

1. $\frac{5x+4}{4x+5}$

5. $\frac{9}{x+1}$

9.

2. $\frac{5a}{6b}$

3. $\frac{a^2}{b^2}$

4. $x + 1$

6. $\frac{x}{x-1}$

7. $a + 3$

8. $\frac{2a+5b}{2a-5b}$

10. $\frac{b(a+b)}{a(a-b)}$

11. $\frac{a(a+3)}{4(a+2)}$

12. $\frac{2a(a+5)}{a-5}$

12-я группа
Решение задач на деление

1. $3a$
2. 7
3. $2a^3$
4. $8a$
5. $17b$
6. $6b$
7. $-2a$
8. $-5ab$
9. $-4a^3$
10. $-3a$
11. $3a$
12. $5b$

13. $\frac{2a}{3}$

14. $\frac{3}{a^2}$

15. $\frac{7b}{8a}$

16. $-2a^2$

17. $-\frac{6}{7a^2}$

18.

19. $-\frac{4}{a}$

20. $-\frac{3a^2}{2}$

21. $-\frac{2a^2}{3b^2}$

22. $\frac{4}{a}$

23. $\frac{8a}{9}$

24. $\frac{9}{7b}$

$-\frac{3b^2}{4a}$

25. $4a^2 + 5a + 3$
26. $2a^2 - 4a + 7$
27. $5a^2 + 4a - 1$
28. $7a^2 + 4a + 3$
29. $3a^2 + 5a + 9$
30. $7a^2 - 5a - 3$
31. $3a + 4b$
32. $5a^2b^2 + 7$
33. $6b - 5ab^2$
34. $5x^2y + 11x$
35. $2x^2 - 5x + 11$
36. $3y^2 - 5y - 9$

13-я группа
Деление суммы на сумму

1. $5a + 4$
2. $4a + 3$
3. $3a + 8$
4. $2a^2 + 5a + 7$
5. $3a^2 + 4a + 6$
6. $4a^2 + 6a + 718.$
7. $3a + 4 \quad R = 3$
8. $5a + 7 \quad R = 2$
9. $7a + 8 \quad R = 5$
10. $5a^2 + 2a + 4 \quad R = 3$
11. $2a^2 + 7a + 8 \quad R = 1$
12. $8a^2 + 5a + 4 \quad R = 5$
13. $2a - 7$
14. $6a - 7$
15. $4a + 5$
16. $4a^2 - 5a + 6$
17. $5a^2 - 7a - 6$
18. $3a^2 - 4a - 8$
19. $5a + 8 \quad R = 2$
20. $3a - 8 \quad R = 3$
21. $8a - 3 \quad R = 1$
22. $2a^2 - 8a + 7 \quad R = 1$
23. $3a^2 - 5a - 6 \quad R = -2$
24. $9a^2 - 6a - 8 \quad R = -3$

Решения задач главы 8

Первое число — это *решение* уравнения, второе — *результат проверки*, число, которое получается в результате подстановки в обеих частях уравнения.

1.	4	26	13.	5	13	25.	2	7	37.	4	1
2.	2	25	14.	7	29	26.	4	23	38.	2	1
3.	5	47	15.	8	37	27.	7	76	39.	5	41
4.	9	48	16.	11	64	28.	11	162	40.	1	23
5.	1	24	17.	2	14	29.	3	9	41.	3	38
6.	7	116	18.	5	91	30.	5	30	42.	7	100
7.	5	53	19.	2	21	31.	2	13	43.	2	29
8.	6	65	20.	5	26	32.	5	71	44.	3	79
9.	10	111	21.	11	55	33.	4	6	45.	4	31
10.	6	54	22.	4	63	34.	12	117	46.	10	154
11.	3	38	23.	6	112	35.	3	42	47.	5	60

12. 4 45 24. 9 220 36. 4 28 48. 2 89

Решения задач главы 9

1. Уравнения с целочисленными коэффициентами, дающие дробные решения.

Первое число — это *решение* уравнения, второе — *результат проверки*.

1. $\frac{7}{3}$ $14\frac{2}{3}$
2. $\frac{11}{2}$ 38
3. $\frac{4}{5}$ $10\frac{2}{5}$
4. $\frac{1}{6}$ $2\frac{5}{6}$
5. $\frac{4}{7}$ $8\frac{5}{7}$
6. $\frac{1}{5}$ $12\frac{3}{5}$
7. $\frac{3}{4}$ $9\frac{3}{4}$
8. $\frac{2}{3}$ $14\frac{2}{3}$
9. $\frac{1}{4}$ $8\frac{1}{4}$
10. $\frac{3}{8}$ $7\frac{1}{2}$
11. $\frac{4}{3}$ $9\frac{2}{3}$
12. $2\frac{1}{3}$ $8\frac{2}{3}$
13. $6\frac{2}{3}$ $189\frac{2}{3}$
14. $2\frac{1}{5}$ $8\frac{3}{5}$
15. $\frac{1}{2}$ $4\frac{1}{2}$
16. $1\frac{3}{4}$ 36
17. $1\frac{1}{7}$ $-1\frac{2}{7}$
18. $1\frac{3}{5}$ $3\frac{4}{5}$
19. $\frac{7}{8}$ $-2\frac{3}{8}$
20. $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$

2. Уравнения с дробными коэффициентами, дающие целочисленные решения.

1.	8	6	11.	4	4	21.	12	10
2.	12	33	12.	5	5	22.	30	20
3.	20	14	13.	7	7	23.	60	74
4.	30	93	14.	11	5	24.	24	56
5.	24	20	15.	5	5	25.	12	20
6.	6	17	16.	5	6	26.	20	22
7.	6	7	17.	7	8	27.	10	27
8.	12	22	18.	5	9	28.	3	5
9.	14	13	19.	2	1	29.	6	8
10.	6	19	20.	3	1	30.	3	6

3. Уравнения с дробными коэффициентами, дающие дробные решения.

1.	$\frac{1}{6}$	1	2.	$\frac{5}{6}$	4
3.	$\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{8}$	6.	$\frac{1}{14}$	$\frac{11}{14}$
4.	$\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{8}$	7.	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$
5.	$\frac{1}{12}$	1	8.	$\frac{5}{12}$	$1\frac{1}{12}$

Решения задач главы 10

В скобках стоят ответы к вариантам задач.

1. 4 (5).
2. 10 (8).
3. 120 (180).
4. 12 (9).
5. 4
6. наименьшее число 51 (43).
7. 59 (49).

Бернхардт Арнольд
Алгебра

Формат 60x84/16
Бумага офсетная. Печать офсетная
Тираж 500 экз.
Заказ №